

# 数値解析 ( 塩田 )

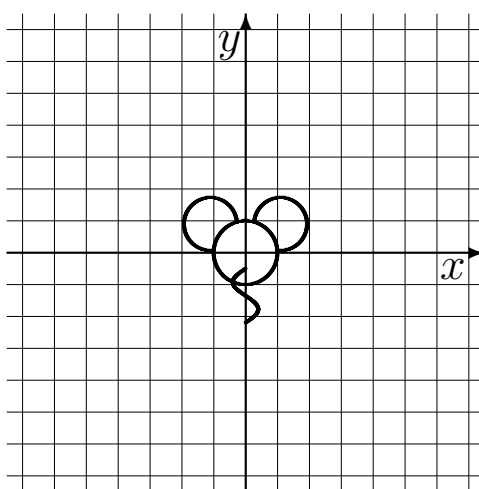
— 固有値・固有ベクトル —

## 1. 一次変換と固有値・固有ベクトル

問 次のネズミの絵を、行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  による一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

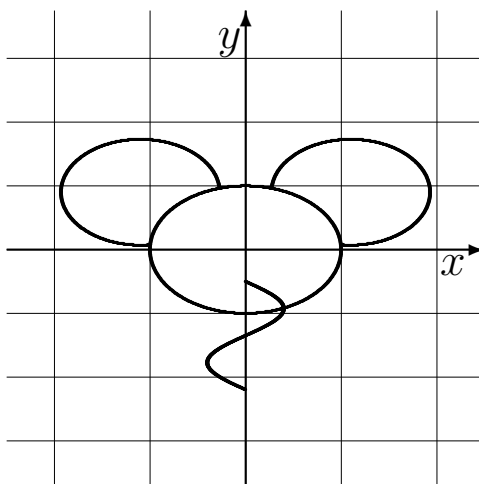
で変換したらどんな絵になるか？



例 1  $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  のとき

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ 2y \end{pmatrix}$$

ゆえ、 $x$  軸方向には 3 倍して左右を逆転させ、 $y$  軸方向には 2 倍した絵を描けば良い。図のように升目を描けばわかり易い。



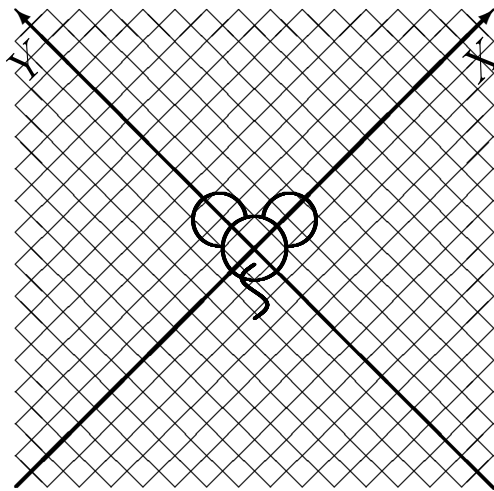
例2  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  のとき

$A$  の固有値・固有ベクトルを求めると、

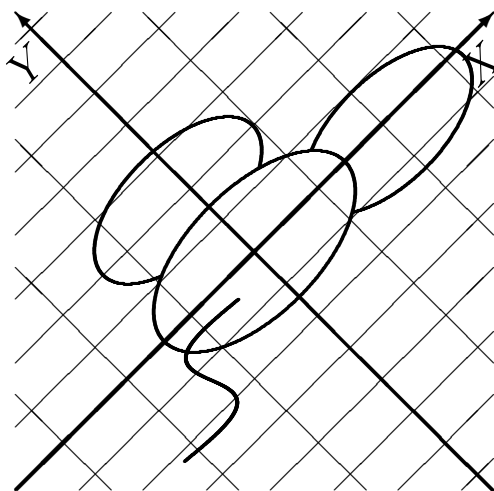
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。これは、この一次変換が絵を  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  方向に4倍、 $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  方向には2倍することを意味する。

そこで  $\mathbf{v}_1$  方向に  $X$  軸を、 $\mathbf{v}_2$  方向に  $Y$  軸を描いて  $XY$  座標系で升目を描く。



升目を  $X$  軸方向に4倍、 $Y$  軸方向に2倍した絵を描くとこのようになる。



## 2. 線形問題が特性方程式で解ける仕組み

その 1

定数係数線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \quad \dots\dots (*)$$

これを固有値・固有ベクトルの考え方で解こう。

1° (\*) の解は

- 足してもスカラー倍しても解になる
- 2階微分方程式なので、一般解は2個の積分定数を含むことから、2次元のベクトル空間  $V$  を成すことがわかる。

2° 「微分をする」という写像を

$$D : V \rightarrow V, \quad Dy = y'$$

と書くことにすれば、 $D$  は  $V$  の一次変換になる。なぜなら、 $y$  が (\*) の解であれば

$$(Dy)'' + a(Dy)' + b(Dy) = y''' + ay'' + by' = (y'' + ay' + by)' = 0' = 0$$

が成り立つからである。

3°  $D$  の固有値・固有ベクトル  $\lambda, y$  とは

$$Dy = \lambda y$$

を満たすスカラーと非零関数  $y$  のことであるから、

$$0 = y'' + ay' + b = D^2y + aDy + by = (\lambda^2 + a\lambda + b)y$$

が成り立つ。すなわち  $\lambda$  は特性方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

の根、すなわち特性根である。

4°  $\lambda$  に対する固有ベクトルは  $Dy = y' = \lambda y$  の解であるから  $y = Ae^{\lambda x}$  である。

5° 特性方程式が異なる特性根  $\lambda, \mu$  を持つときは、以上の議論から

$$y = e^{\lambda x} + Be^{\mu x}$$

が (\*) の一般解になる。

行列は表に出て来ないが、定数係数線形微分方程式の解法にはこのように固有値・固有ベクトルの考え方が潜んでいる。(特性根が重根のときはもう少し議論が必要です。)

## 線形漸化式

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0 \quad \dots\dots (\#)$$

これも定数係数線形微分方程式と全く同じストーリーで解ける。

1° (#) の解は

- 足してもスカラー倍しても解になる
- $x_0, x_1$  を決めると解がただ一通りに決まるので、一般式は2個のパラメータを含む

ことから、2次元のベクトル空間  $V$  を成すことがわかる。

2° 「番号  $n$  を1進める」という写像を

$$D: V \rightarrow V, \quad D x_n = x_{n+1}$$

と書くことにすれば、 $D$  は  $V$  の一次変換になる。なぜなら

$$(Dx)_{n+2} + a(Dx)_{n+1} + b(Dx)_n = x_{n+3} + ax_{n+2} + bx_{n+1} = 0$$

が成り立つからである。

3°  $D$  の固有値・固有ベクトル  $\lambda, \{x_n\}$  とは

$$D x_n = \lambda x_n$$

を満たすスカラーと非零数列  $\{x_n\}$  のことであるから、

$$0 = x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = D^2 x_n + aD x_n + b x_n = (\lambda^2 + a\lambda + b)x_n$$

が成り立つ。すなわち  $\lambda$  は特性方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

の根、すなわち特性根である。

4°  $\lambda$  に対する固有ベクトルは  $D x_n = x_{n+1} = \lambda x_n$  の解である等比数列  $x_n = \lambda^n$  になる。

5° 特性方程式が異なる特性根  $\lambda, \mu$  を持つときは、以上の議論から

$$x_n = A\lambda^n + B\mu^n$$

が (#) の一般解になる。

### 3. 練習問題

次の行列の固有値・固有ベクトルを求めてみよう。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$