

数値解析（塩田）

— クッタの 3/8 公式 —

問題設定

$f(x, y)$ を与えられた関数とするとき、微分方程式

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

を初期条件 $y(x_0) = y_0$ のもとで数値的に解きたい。

方針

- x の刻み幅 h を決め、 $x_n = x_0 + n \times h$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく。
- $y(x_n)$ の近似値を y_n と書くこととし、順番に y_n から y_{n+1} の値を推定してゆく。

クッタの 3/8 公式

$$f = f(x_n, y_n),$$

$$\hat{y} = y_n + \frac{h}{3} \times f,$$

$$\hat{f} = f\left(x_n + \frac{h}{3}, \hat{y}\right),$$

$$\tilde{y} = y_n - \frac{h}{3} \times f + h \times \hat{f},$$

$$\tilde{f} = f\left(x_n + \frac{2h}{3}, \tilde{y}\right),$$

$$\bar{y} = y_n + h \times (f - \hat{f} + \tilde{f}),$$

$$\bar{f} = f(x_n + h, \bar{y})$$

をこの順に求めて

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{8} \times \left(f + 3\hat{f} + 3\tilde{f} + \bar{f}\right) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

とおく。