

数値解析 (塩田)

— ガウスの消去法 —

1. 行と列

- 「行」の字の中には2本の 横棒、「列」の字の中には2本の 縦棒 があるので、横の並びが行、縦の並びが列

行列

- $m \times n$ 行列 = (m, n) -行列 = m 個の行と n 個の列を持つ行列 (行数が左、列数が右)

$$\left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \text{ 行目} \\ \hline \vdots \\ \hline i \text{ 行目} \\ \hline \vdots \\ \hline m \text{ 行目} \\ \hline \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \text{ 列目} \\ \hline \vdots \\ \hline i \text{ 列目} \\ \hline \vdots \\ \hline n \text{ 列目} \\ \hline \end{array} \right)$$

- (i, j) -成分 = i 行目の j 列の成分 (行番号が左、列番号が右)
- (i, j) -成分が a_{ij} である $m \times n$ 行列を簡単に $A = (a_{ij})$ と表す：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. 正則行列

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が次の同値な条件を満たすとき、 A を正則行列と言う：

- 逆行列 A^{-1} が存在する。
- 行列式 $\det(A) = |A|$ は 0 ではない
- 0 は固有値ではない
- n 次元縦ベクトルの一次変換 $x \mapsto Ax$ は一対一写像 (全単射) である
- A の階数 $\text{rank}(A)$ は n である
- A の n 個の行ベクトルが一次独立である
- A の n 個の列ベクトルが一次独立である

3. 行基本変形

行列に対する次の 3 種類の操作を「行基本変形」と言う。これらは可逆な操作である。

- 第 i 行と第 j 行を入れ替える

$$\left(\begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline i \text{ 行目} \\ \hline \vdots \\ \hline j \text{ 行目} \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array} \right) \quad \times \quad \left(\begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline \text{元 } j \text{ 行目} \\ \hline \vdots \\ \hline \text{元 } i \text{ 行目} \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array} \right)$$

- 第 i 行全体を、0 でないスカラー倍する

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{i \text{ 行目}} \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\text{元 } i \text{ 行目の } c \text{ 倍}} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- 第 j 行から第 i 行のスカラー倍を引く (※ 上書きするのは第 j 行の方)

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{i \text{ 行目}} \\ \vdots \\ \boxed{j \text{ 行目}} \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{i \text{ 行目}} \\ \vdots \\ \boxed{\text{元 } j \text{ 行目} - i \text{ 行目の } c \text{ 倍}} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

4. 連立一次方程式の式変形の、拡大係数行列による表現

初期状態：

$$\begin{cases} y - z = -1 \\ 2x - 6y + 4z = 2 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

初期状態：

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

x の入った式を第 1 式とするため、第 1 式と第 2 式を入れ替える：

$$\begin{cases} 2x - 6y + 4z = 2 \\ y - z = -1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

第 1 行と第 2 行を入れ替える：

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

第 1 式の x の係数が 1 になるように第 1 式を $\frac{1}{2}$ 倍する：

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ y - z = -1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

第 1 行を $\frac{1}{2}$ 倍する：

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

第 3 式から第 1 式の 3 倍を引いて第 3 式の x を消去する：

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ y - z = -1 \\ 10y - 7z = -1 \end{cases}$$

第 3 行から第 1 行の 3 倍を引く：

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

第 3 式から第 2 式の 10 倍を引いて第 3 式の y を消去する：

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ y - z = -1 \\ 3z = 9 \end{cases}$$

第 3 行から第 2 行の 10 倍を引く：

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

実行例

----- ピボット選択無し -----

拡大係数行列 :

9.0000000	-6.0000000	-2.0000000	-3.0000000	1.0000000
-5.0000000	-6.0000000	10.0000000	-7.0000000	-9.0000000
10.0000000	-8.0000000	-7.0000000	10.0000000	-6.0000000
9.0000000	9.0000000	2.0000000	3.0000000	-10.0000000

1 行目を用いた掃き出し

9.0000000	-6.0000000	-2.0000000	-3.0000000	1.0000000
0.0000000	-9.3333333	8.8888889	-8.6666667	-8.4444444
0.0000000	-1.3333333	-4.7777778	13.3333333	-7.1111111
0.0000000	15.0000000	4.0000000	6.0000000	-11.0000000

2 行目を用いた掃き出し

9.0000000	-6.0000000	-2.0000000	-3.0000000	1.0000000
0.0000000	-9.3333333	8.8888889	-8.6666667	-8.4444444
0.0000000	0.0000000	-6.0476190	14.5714286	-5.9047619
0.0000000	0.0000000	18.2857143	-7.9285714	-24.5714286

3 行目を用いた掃き出し

9.0000000	-6.0000000	-2.0000000	-3.0000000	1.0000000
0.0000000	-9.3333333	8.8888889	-8.6666667	-8.4444444
0.0000000	0.0000000	-6.0476190	14.5714286	-5.9047619
0.0000000	0.0000000	0.0000000	36.1299213	-42.4251969

A' :

9.0000000	-6.0000000	-2.0000000	-3.0000000	1.0000000
0.0000000	-9.3333333	8.8888889	-8.6666667	-8.4444444
0.0000000	0.0000000	-6.0476190	14.5714286	-5.9047619
0.0000000	0.0000000	0.0000000	36.1299213	-42.4251969

x :

-0.538411245505067
0.230467473030402
-1.852893102321020
-1.174239947695325

検算 Ax :

1.000000000000001
-8.999999999999998
-5.999999999999998
-10.000000000000007

b :

1.000000000000000
-9.000000000000000
-6.000000000000000
-10.000000000000000

最大誤差 = 0.000000000000007

----- ピボット選択あり -----

拡大係数行列 :

9.0000000	-6.0000000	-2.0000000	-3.0000000	1.0000000
-5.0000000	-6.0000000	10.0000000	-7.0000000	-9.0000000
10.0000000	-8.0000000	-7.0000000	10.0000000	-6.0000000
9.0000000	9.0000000	2.0000000	3.0000000	-10.0000000

1 行目と 3 行目を交換 (ピボット選択)

10.0000000	-8.0000000	-7.0000000	10.0000000	-6.0000000
-5.0000000	-6.0000000	10.0000000	-7.0000000	-9.0000000
9.0000000	-6.0000000	-2.0000000	-3.0000000	1.0000000
9.0000000	9.0000000	2.0000000	3.0000000	-10.0000000

1 行目をういた掃き出し

10.0000000	-8.0000000	-7.0000000	10.0000000	-6.0000000
0.0000000	-10.0000000	6.5000000	-2.0000000	-12.0000000
0.0000000	1.2000000	4.3000000	-12.0000000	6.4000000
0.0000000	16.2000000	8.3000000	-6.0000000	-4.6000000

2 行目と 4 行目を交換 (ピボット選択)

10.0000000	-8.0000000	-7.0000000	10.0000000	-6.0000000
0.0000000	16.2000000	8.3000000	-6.0000000	-4.6000000
0.0000000	1.2000000	4.3000000	-12.0000000	6.4000000
0.0000000	-10.0000000	6.5000000	-2.0000000	-12.0000000

2 行目をういた掃き出し

10.0000000	-8.0000000	-7.0000000	10.0000000	-6.0000000
0.0000000	16.2000000	8.3000000	-6.0000000	-4.6000000
0.0000000	0.0000000	3.6851852	-11.5555556	6.7407407
0.0000000	0.0000000	11.6234568	-5.7037037	-14.8395062

3 行目と 4 行目を交換 (ピボット選択)

10.0000000	-8.0000000	-7.0000000	10.0000000	-6.0000000
0.0000000	16.2000000	8.3000000	-6.0000000	-4.6000000
0.0000000	0.0000000	11.6234568	-5.7037037	-14.8395062
0.0000000	0.0000000	3.6851852	-11.5555556	6.7407407

3 行目をういた掃き出し

10.0000000	-8.0000000	-7.0000000	10.0000000	-6.0000000
0.0000000	16.2000000	8.3000000	-6.0000000	-4.6000000
0.0000000	0.0000000	11.6234568	-5.7037037	-14.8395062
0.0000000	0.0000000	-0.0000000	-9.7472119	11.4455656

A' :

10.0000000	-8.0000000	-7.0000000	10.0000000	-6.0000000
0.0000000	16.2000000	8.3000000	-6.0000000	-4.6000000
0.0000000	0.0000000	11.6234568	-5.7037037	-14.8395062
0.0000000	0.0000000	-0.0000000	-9.7472119	11.4455656

x :

-0.538411245505067
0.230467473030402
-1.852893102321020
-1.174239947695325

検算 Ax :

0.999999999999999
-8.999999999999998
-6.000000000000001
-10.000000000000002

b :

1.000000000000000
-9.000000000000000
-6.000000000000000
-10.000000000000000

最大誤差 = 0.000000000000002