数値解析（塩田） 2023年度 課題4

1月17日出題

次の課題Aまたは課題Bを解け。(両方やった場合はそれなりに加点します。)

課題A LU分解法をプログラミングし、次式で定める n 次行列 A と n 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し、$n = 4, 8, 16, 32$ の場合に $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

課題B ヤコビ法とガウス-ザイデル法をプログラミングし、次式で定める n 次行列 A と n 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し、$n = 4, 8, 16, 32$ の場合に方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を計算し、収束までに要するステップ数を比較せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & \text{\LARGE O} \\ 1 & 3 & 1 & & & \\ & 1 & 3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & \text{\LARGE O} & & 1 & 3 & 1 \\ & & & & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

注意
- プログラムを共同製作した場合はその旨を必ず明記すること。
- `http://lupus.is.kochi-u.ac.jp/shiota/na2023/na2023.html` に雛形プログラムをアップしてあるので、その未完成部分（それぞれ1箇所）のみを作成しても良い。
- 雛形を使った場合は、プログラムリストは自作の部分のみで良い。
- 実行結果は実行出力を全て載せるのではなく、<u>適切にまとめよ。</u>

提出方法
- メールにて shiota@is.kochi-u.ac.jp 宛て。
- 件名は 数値解析課題 [自分の学籍番号]
- テキストでも、WORD 等のドキュメントでも可。ただし、プログラムの動作が確認できるよう、プログラムリストはテキストとしてコピーできることが望ましい。

提出期限 1月31日 (水) 8:50am

ヒント：配列番号を $0, \cdots, n-1$ とした場合の LU 分解法アルゴリズム

Step 1° のアルゴリズム ver.1

$A = (a_{ij})$, $L = (\ell_{ij})$, $U = (u_{ij})$ として、

$$
\begin{aligned}
&\textbf{for } i = 0 \textbf{ to } n-1 \\
&\qquad \textbf{for } j = 0 \textbf{ to } i \\
&\qquad\qquad \ell_{ij} = a_{ij} - \sum_{0 \leqq k < j} \ell_{ik}\, u_{kj} \\
&\qquad \textbf{for } j = i+1 \textbf{ to } n-1 \\
&\qquad\qquad u_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{0 \leqq k < i} \ell_{ik}\, u_{kj} \right) / \, \ell_{ii}
\end{aligned}
$$

Step 1° のアルゴリズム ver.2

メモリ節約の為に L, U の為の変数を使わない方法。$A = (a_{ij})$ について次の手続きを行うと、最終的に

$$
\begin{cases}
\ell_{ij} = a_{ij} & (\ \ i \geqq j \text{ のとき } \ ) \\
u_{ij} = a_{ij} & (\ \ i < j \text{ のとき } \ )
\end{cases}
$$

となっている。

$$
\begin{aligned}
&\textbf{for } i = 0 \textbf{ to } n-2 \\
&\qquad c = a_{ii} \\
&\qquad \textbf{for } j = i+1 \textbf{ to } n-1 \\
&\qquad\qquad a_{ij} = a_{ij}/c \\
&\qquad \textbf{for } k = i+1 \textbf{ to } n-1 \\
&\qquad\qquad \textbf{for } j = i+1 \textbf{ to } n-1 \\
&\qquad\qquad\qquad a_{kj} = a_{kj} - a_{ki}\, a_{ij}
\end{aligned}
$$

Step 2° のアルゴリズム

$$
\begin{aligned}
&\textbf{for } i = 0 \textbf{ to } n-1 \\
&\qquad y_i = \left(b_i - \sum_{j=0}^{i-1} \ell_{ij}\, y_j \right) / \, \ell_{ii}
\end{aligned}
$$

Step 3° のアルゴリズム

$$
\begin{aligned}
&\textbf{for } i = n-1 \textbf{ downto } 0 \\
&\qquad x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} u_{ij}\, x_j
\end{aligned}
$$