数値解析 （塩田）

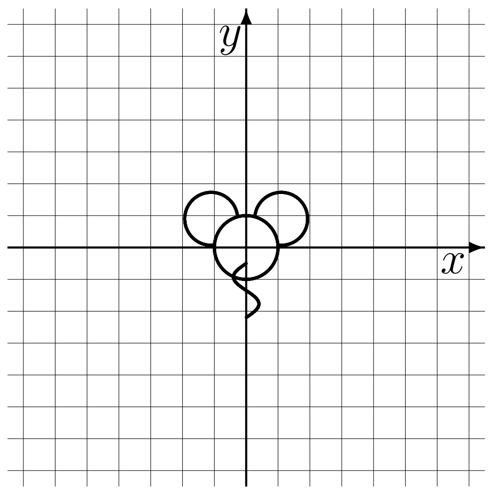
— 固有値・固有ベクトル —

1. 一次変換と固有値・固有ベクトル

<u>問</u>　次のネズミの絵を、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ による一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

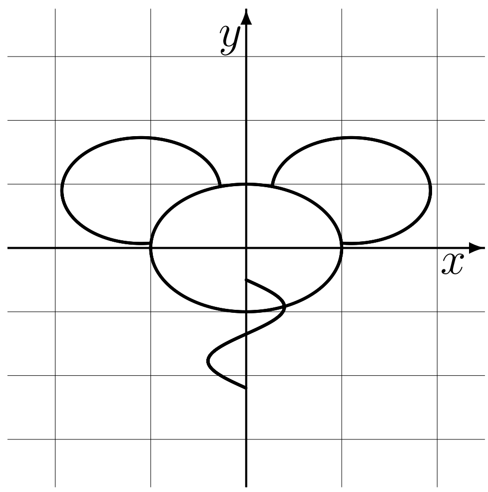
で変換したらどんな絵になるか？



<u>例 1</u>　$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ 2y \end{pmatrix}$$

ゆえ、x 軸方向には 3 倍して左右を逆転させ、y 軸方向には 2 倍した絵を描けば良い。図のように升目を描けばわかり易い。



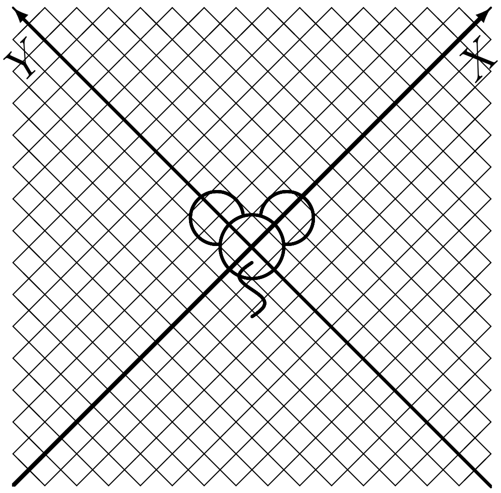
<u>例２</u>　$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

A の固有値・固有ベクトルを求めると、

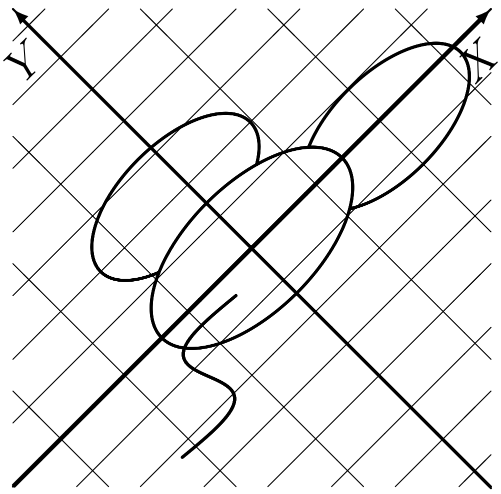
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。これは、この一次変換が絵を $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に 4 倍、$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向には 2 倍することを意味する。

そこで $\boldsymbol{v}_1$ 方向に X 軸を、$\boldsymbol{v}_2$ 方向に Y 軸を描いて XY 座標系で升目を描く。



升目を X 軸方向に 4 倍、Y 軸方向に 2 倍した絵を描くとこのようになる。



2. 線形問題が特性方程式で解ける仕組み

その 1

定数係数線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \quad \cdots\cdots \ (*)$$

これを固有値・固有ベクトルの考え方で解こう。

1° $(*)$ の解は

- 足してもスカラー倍しても解になる
- 2 階微分方程式なので、一般解は 2 個の積分定数を含む

ことから、2 次元のベクトル空間 V を成すことがわかる。

2° 「微分をする」という写像を

$$D : V \to V, \quad D\,y = y'$$

と書くことにすれば、D は V の一次変換になる。なぜなら、y が $(*)$ の解であれば

$$(Dy)'' + a(Dy)' + b(Dy) = y''' + ay'' + by' = (y'' + ay' + by)' = 0' = 0$$

が成り立つからである。

3° D の固有値・固有ベクトル λ, y とは

$$D\,y = \lambda y$$

を満たすスカラーと非零関数 y のことであるから、

$$0 = y'' + ay' + b = D^2 y + aDy + by = (\lambda^2 + a\lambda + b)y$$

が成り立つ。すなわち λ は特性方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

の根、すなわち特性根である。

4° λ に対する固有ベクトルは $D\,y = y' = \lambda y$ の解であるから $y = Ae^{\lambda x}$ である。

5° 特性方程式が異なる特性根 λ, μ を持つときは、以上の議論から

$$y = e^{\lambda x} + Be^{\mu x}$$

が $(*)$ の一般解になる。

行列は表に出て来ないが、定数係数線形微分方程式の解法にはこのように固有値・固有ベクトルの考え方が潜んでいる。(特性根が重根のときはもう少し議論が必要です。)

その2

線形漸化式

$$x_{n+2} + a x_{n+1} + b x_n = 0 \quad \cdots\cdots \ (\sharp)$$

これも定数係数線形微分方程式と全く同じストーリーで解ける。

1° $(\sharp)$ の解は

- 足してもスカラー倍しても解になる
- $x_0,\ x_1$ を決めると解がただ一通りに決まるので、一般式は2個のパラメータを含む

ことから、2次元のベクトル空間 V を成すことがわかる。

2° 「番号 n を 1 進める」という写像を

$$D : V \to V, \quad D\,x_n = x_{n+1}$$

と書くことにすれば、D は V の一次変換になる。なぜなら

$$(Dx)_{n+2} + a(Dx)_{n+1} + b(Dx)_n = x_{n+3} + a x_{n+2} + b x_{n+1} = 0$$

が成り立つからである。

3° D の固有値・固有ベクトル $\lambda, \{x_n\}$ とは

$$D\,x_n = \lambda x_n$$

を満たすスカラーと非零数列 $\{x_n\}$ のことであるから、

$$0 = x_{n+2} + a x_{n+1} + b x_n = D^2 x_n + a D x_n + b x_n = (\lambda^2 + a\lambda + b) x_n$$

が成り立つ。すなわち λ は特性方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

の根、すなわち特性根である。

4° λ に対する固有ベクトルは $D\,x_n = x_{n+1} = \lambda x_n$ の解である等比数列 $x_n = \lambda^n$ になる。

5° 特性方程式が異なる特性根 λ, μ を持つときは、以上の議論から

$$x_n = A\lambda^n + B\mu^n$$

が $(\sharp)$ の一般解になる。