

数値解析 (塩田)

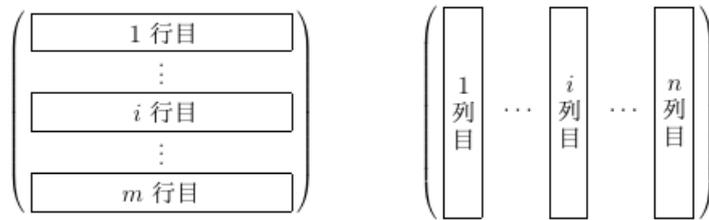
— ガウスの消去法 —

1. 行と列

- 「行」の字の中には2本の 横棒、「列」の字の中には2本の 縦棒 があるので、横の並びが行、縦の並びが列

行列

- $m \times n$ 行列 = (m, n) -行列 = m 個の行と n 個の列を持つ行列 (行数が左、列数が右)



- (i, j) -成分 = i 行目の j 列の成分 (行番号が左、列番号が右)
- (i, j) -成分が a_{ij} である $m \times n$ 行列を簡単に $A = (a_{ij})$ と表す :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. 正則行列

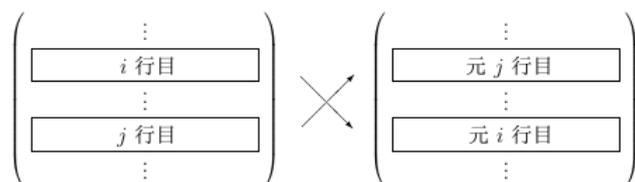
n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が次の同値な条件を満たすとき、 A を正則行列と言う :

- 逆行列 A^{-1} が存在する。
- 行列式 $\det(A) = |A|$ は 0 ではない
- 0 は固有値ではない
- n 次元縦ベクトルの一次変換 $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は一対一写像 (全単射) である
- A の階数 $\text{rank}(A)$ は n である
- A の n 個の行ベクトルが一次独立である
- A の n 個の列ベクトルが一次独立である

3. 行基本変形

行列に対する次の 3 種類の操作を「行基本変形」と言う。これらは可逆な操作である。

- 第 i 行と第 j 行を入れ替える



- 第 i 行全体を、0 でないスカラー倍する

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{i \text{ 行目}} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{\text{元 } i \text{ 行目の } c \text{ 倍}} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- 第 j 行から第 i 行のスカラー倍を引く (※ 上書きするのは第 j 行の方)

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{i \text{ 行目}} \\ \vdots \\ \boxed{j \text{ 行目}} \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \boxed{i \text{ 行目}} \\ \vdots \\ \boxed{\text{元 } j \text{ 行目 } - i \text{ 行目の } c \text{ 倍}} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

4. 連立一次方程式の式変形の、拡大係数行列による表現

初期状態：

$$\begin{cases} y - z = -1 \\ 2x - 6y + 4z = 2 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

初期状態：

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

x の入った式を第 1 式とするため、第 1 式と第 2 式を入れ替える：

$$\begin{cases} 2x - 6y + 4z = 2 \\ y - z = -1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

第 1 行と第 2 行を入れ替える：

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

第 1 式の x の係数が 1 になるように第 1 式を $\frac{1}{2}$ 倍する：

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ y - z = -1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

第 1 行を $\frac{1}{2}$ 倍する：

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

第 3 式から第 1 式の 3 倍を引いて第 3 式の x を消去する：

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ y - z = -1 \\ 10y - 7z = -1 \end{cases}$$

第 3 行から第 1 行の 3 倍を引く：

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

第 3 式から第 2 式の 10 倍を引いて第 3 式の y を消去する：

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ y - z = -1 \\ 3z = 9 \end{cases}$$

第 3 行から第 2 行の 10 倍を引く：

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

実行例

ピボット選択ありで、ランダムな 4 元連立一次方程式を解く。

拡大係数行列：

-3.5145622	-4.6372624	9.8028950	7.7799316	2.5537401
-5.4942102	-0.8134165	-8.9400594	-0.6695192	9.4748287
-4.0818981	-1.5462027	-6.9707814	-7.2853502	-7.4494552
6.2667432	-4.1709694	2.7041315	9.9930417	6.6635107

1 行目と 4 行目を交換 (ピボット選択)

6.2667432	-4.1709694	2.7041315	9.9930417	6.6635107
-5.4942102	-0.8134165	-8.9400594	-0.6695192	9.4748287
-4.0818981	-1.5462027	-6.9707814	-7.2853502	-7.4494552
-3.5145622	-4.6372624	9.8028950	7.7799316	2.5537401

1 行目をういた掃き出し

6.2667432	-4.1709694	2.7041315	9.9930417	6.6635107
0.0000000	-4.4702096	-6.5692798	8.0916300	15.3168950
0.0000000	-4.2630003	-5.2094216	-0.7762948	-3.1091191
0.0000000	-6.9764569	11.3194464	13.3843045	6.2908205

2 行目と 4 行目を交換 (ピボット選択)

6.2667432	-4.1709694	2.7041315	9.9930417	6.6635107
0.0000000	-6.9764569	11.3194464	13.3843045	6.2908205
0.0000000	-4.2630003	-5.2094216	-0.7762948	-3.1091191
0.0000000	-4.4702096	-6.5692798	8.0916300	15.3168950

2 行目をういた掃き出し

6.2667432	-4.1709694	2.7041315	9.9930417	6.6635107
0.0000000	-6.9764569	11.3194464	13.3843045	6.2908205
0.0000000	0.0000000	-12.1262282	-8.9548436	-6.9531576
0.0000000	0.0000000	-13.8222878	-0.4844491	11.2860114

3 行目と 4 行目を交換 (ピボット選択)

6.2667432	-4.1709694	2.7041315	9.9930417	6.6635107
0.0000000	-6.9764569	11.3194464	13.3843045	6.2908205
0.0000000	0.0000000	-13.8222878	-0.4844491	11.2860114
0.0000000	0.0000000	-12.1262282	-8.9548436	-6.9531576

3 行目をういた掃き出し

6.2667432	-4.1709694	2.7041315	9.9930417	6.6635107
0.0000000	-6.9764569	11.3194464	13.3843045	6.2908205
0.0000000	0.0000000	-13.8222878	-0.4844491	11.2860114
0.0000000	0.0000000	0.0000000	-8.5298387	-16.8543223

Step 2 を実行

x :

-0.7389604
1.4519169
-0.8857612
1.9759251

検算

Ax :	b:
2.5537401	2.5537401
9.4748287	9.4748287
-7.4494552	-7.4494552
6.6635107	6.6635107

最大誤差 = 0.0000000000