数値解析　(塩田)

―― 偏微分方程式 ――

1. 物理現象を表す偏微分方程式の例

ポアソン方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

- u は (例えば) 静電ポテンシャルを表す関数。
- (x, y, z) は位置座標。
- $f(x, y, z)$ は電荷の分布を表す関数。

熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- u は温度を表す関数。
- t は時刻、(x, y) は位置座標。
- 拡散方程式とも呼ばれる。

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- u は波の変位を表す関数。
- t は時刻、(x, y) は位置座標。

ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

- 電荷が存在しない場合の静電ポテンシャルや、熱分布の定常状態などを表す。
- ポアソン方程式、熱伝導方程式などの部分問題でもある。

2．2 次元のラプラス方程式の解法

例　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ($0 \leqq x,\ y \leqq 3$) を、$x,\ y$ の刻み幅 $h = 1$ で解く。

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,$$
$$y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = 2,\ y_3 = 3,$$
$$u_{ij} = u(x_i, y_j)$$

とおくと、2 階の中心差分の公式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) &\quad \frac{1}{h^2}\left(u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)\right) \\
&= \frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &\quad \frac{1}{h^2}\left(u(x_i, y_j + h) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - h)\right) \\
&= \frac{1}{h^2}\left(u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}\right)
\end{aligned}$$

から

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} \quad 0$$

を得る。　を思い切って $=$ と書くと

$$\begin{cases}
4u_{11} = \underline{u_{01}} + u_{21} + \underline{u_{10}} + u_{12} \\
4u_{12} = \underline{u_{02}} + u_{22} + u_{11} + \underline{u_{13}} \\
4u_{21} = u_{11} + \underline{u_{31}} + \underline{u_{20}} + u_{22} \\
4u_{22} = u_{12} + \underline{u_{32}} + u_{21} + \underline{u_{23}}
\end{cases}$$

この中で下線の付いた u_{ij} は境界条件で与えられた定数で、未知数は $u_{11},\ u_{12},\ u_{21},\ u_{22}$ の 4 個。式も 4 個なので連立一次方程式として唯一通りに解ける。

　本当は h がもっと小さく、未知数も式も膨大な個数になるので大きな行列の計算が必要になる。