数値解析　(塩田)

— ルンゲ・クッタ法 —

定理　ルンゲ・クッタ法の誤差は刻み幅を h として $O(h^4)$ である。

証明　ホイン法の場合と同様に、真の値 $y(x_1)$ と近似値 y_1 を共にきざみ幅 h の展開式として表したとき、h^4 の項まで係数が一致することを言えばよい。

$0°$　計算式を復習しておくと、

$$
\begin{aligned}
\hat{y} &= y_0 + \frac{h}{2} f(x_0,\, y_0), & \hat{f} &= f\left(x_0 + \frac{h}{2},\, \hat{y}\right), \\
\tilde{y} &= y_0 + \frac{h}{2} \hat{f}, & \tilde{f} &= f\left(x_0 + \frac{h}{2},\, \tilde{y}\right), \\
\bar{y} &= y_0 + h \tilde{f}, & \bar{f} &= f(x_0 + h,\, \bar{y}), \\
y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}\left(f + 2\hat{f} + 2\tilde{f} + \bar{f}\right)
\end{aligned}
$$

$1°$　まず $x = x_0$ における y の微分を f の偏微分を用いて表そう。簡単のため、$x = x_0$ における関数値を単に

$$
y = y(x_0) = y_0,\ y' = y'(x_0), \cdots,\ f = f(x_0, y_0),\ f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \cdots
$$

などと表す。すると、

$$
y' = f
$$

と、公式

$$
\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = F_x + F_y\, y' = F_x + F_y\, f
$$

を繰り返し用いることにより、以下の式を得る：

$$
y'' = f_x + f_y f
$$

$$
\begin{aligned}
y''' &= (f_x + f_y f)_x + (f_x + f_y f)_y\, f \\
&= (f_{xx} + f_{yx} f + f_y f_x) + (f_{xy} + f_{yy} f + f_y^2)\, f \\
&= (f_{xx} + f_x f_y) + (2 f_{xy} + f_y^2)\, f + f_{yy} f^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y^{(4)} = \{\, (f_{xx} + f_x f_y) + (2 f_{xy} + f_y^2) f + f_{yy} f^2 \,\}_x \\
+ \{ (f_{xx} + f_x f_y) + (2 f_{xy} + f_y^2) f + f_{yy} f^2 \,\}_y\, f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\, (f_{xxx} + f_{xx}f_y + f_x f_{yx}) + (2f_{xyx} + 2f_y f_{yx})\, f \\
&\qquad\qquad + (2f_{xy} + f_y^2)\, f_x + f_{yyx} f^2 + 2f_{yy} f f_x \,\} \\
&\qquad + \{\, (f_{xxy} + f_{xy}f_y + f_x f_{yy}) + (2f_{xyy} + 2f_y f_{yy})\, f \\
&\qquad\qquad + (2f_{xy} + f_y^2) f_y + (f_{yyy} f^2 + 2f_{yy} f f_y) \,\}\, f \\
&= f_{xxx} + f_y f_{xx} + \underline{f_x f_{xy}} + \underline{\underline{2f_{xxy}}} f + \underline{\underline{\underline{2f_y f_{xy}}}} f \\
&\qquad\qquad + \underline{2f_x f_{xy}} + f_x f_y^2 + f_{xyy} f^2 + 2f_x f_{yy} f \\
&\qquad + \underline{\underline{f_{xxy}}} f + \underline{\underline{\underline{f_y f_{xy}}}} f + f_x f_{yy} f + 2f_{xyy} f^2 + \underline{\underline{2f_y f_{yy}}} f^2 \\
&\qquad\qquad + \underline{\underline{\underline{2f_y f_{xy}}}} f + f_y^3 f + f_{yyy} f^3 + \underline{\underline{2f_y f_{yy}}} f^2 \\
&= (f_{xxx} + f_y f_{xx} + \underline{3f_x f_{xy}} + f_x f_y^2) \\
&\qquad + (\underline{\underline{3f_{xxy}}} + \underline{\underline{\underline{5f_y f_{xy}}}} + 3f_x f_{yy} + f_y^3)\, f + (3f_{xyy} + \underline{\underline{4f_y f_{yy}}})\, f^2 + f_{yyy} f^3
\end{aligned}
$$

2° 偏微分の記号が煩雑なので、

$$
\begin{aligned}
&a = f_x,\ b = f_y, \\
&c = f_{xx},\ d = f_{xy},\ e = f_{yy}, \\
&k = f_{xxx},\ \ell = f_{xxy},\ m = f_{xyy},\ n = f_{yyy}
\end{aligned}
$$

と置いて書き直そう：

$$
\begin{aligned}
y' &= f \\
y'' &= a + bf \\
y''' &= (c + ab) + (2d + b^2) f + e f^2 \\
y^{(4)} &= (k + bc + 3ad + ab^2) \\
&\qquad + (3\ell + 5bd + 3ae + b^3) f + (3m + 4be) f^2 + n f^3
\end{aligned}
$$

3° 2 変数関数としての $f(x,y)$ のテイラー展開は 2° の記号で次のようになる：

$$
\begin{aligned}
f(x+s, y+t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(s\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \\
&= f + (s f_x + t f_y) + \frac{1}{2}\Bigl(s^2 f_{xx} + 2st f_{xy} + t^2 f_{yy} \Bigr) \\
&\qquad + \frac{1}{6}\Bigl(s^3 f_{xxx} + 3s^2 t f_{xxy} + 3st^2 f_{xyy} + t^3 f_{yyy} \Bigr) + (s,\, t \text{ について 4 次以上の項}) \\
&= f + (as + bt) + \frac{1}{2}\Bigl(cs^2 + 2dst + et^2 \Bigr) \\
&\qquad + \frac{1}{6}\Bigl(ks^3 + 3\ell s^2 t + 3mst^2 + nt^3 \Bigr) + (s,\, t \text{ について 4 次以上の項})
\end{aligned}
$$

4° 3° の式を用いて、$\hat{y}, \hat{f}, \tilde{y}, \tilde{f}, \bar{y}, \bar{f}$ を刻み幅 h の展開式で表そう。簡単のため、h^4 以上の項を省略することを $\equiv$ で表すことにする。

$$\hat{y} = y + \left(\frac{h}{2}\right) f$$

$$\begin{aligned}
\hat{f} &= f\left(x + \left(\frac{h}{2}\right), y + \left(\frac{h}{2} f\right) f\right) \\
&\equiv f + \left[a\left(\frac{h}{2}\right) + b\left(\frac{h}{2} f\right)\right] \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left[c\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2d\left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{h}{2} f\right) + \left(\frac{h}{2} f\right)^2 e\right] \\
&\qquad + \frac{1}{6}\left[k\frac{h}{2}^3 + 3\ell\left(\frac{h}{2}\right)^2\left(\frac{h}{2} f\right) + 3m\left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{h}{2} f\right)^2 + n\left(\frac{h}{2} f\right)^3\right] \\
&\equiv f + \frac{1}{2}\Big(a + bf\Big)h + \frac{1}{8}\Big(c + 2df + ef^2\Big)h^2 \\
&\qquad + \frac{1}{48}\Big(k + 3\ell f + 3mf^2 + nf^3\Big)h^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{y} &= y + \left(\frac{h}{2}\right)\hat{f} \\
&\equiv y + \left\{\frac{1}{2} fh + \frac{1}{4}\Big(a + bf\Big)h^2 + \frac{1}{16}\Big(c + 2df + ef^2\Big)h^3\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f} &\equiv f\left(x + \left(\frac{h}{2}\right), y + \{\text{as above}\}\right) \\
&\equiv f + \left[a\left(\frac{h}{2}\right) + b\{\cdots\}\right] + \frac{1}{2}\left[c\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2d\left(\frac{h}{2}\right)\{\cdots\} + e\{\cdots\}^2\right] \\
&\qquad + \frac{1}{6}\left[k\left(\frac{h}{2}\right)^3 + 3\ell\left(\frac{h}{2}\right)^2\{\cdots\} + 3m\left(\frac{h}{2}\right)\{\cdots\}^2 + n\{\cdots\}^3\right] \\
&\equiv f + \left[a\left(\frac{h}{2}\right) + b\{\cdots\}\right] \\
&\qquad + \frac{1}{2}\Bigg[c\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2d\left(\frac{h}{2}\right)\left\{\frac{1}{2} fh + \frac{1}{4}(a + bf)h^2\right\} \\
&\qquad\qquad + e\left\{\left(\frac{1}{2} fh\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2} fh\right)\left(\frac{1}{4}(a + bf)h^2\right)\right\}\Bigg] \\
&\qquad + \frac{1}{6}\left[k\left(\frac{h}{2}\right)^3 + 3\ell\left(\frac{h}{2}\right)^2\left\{\frac{1}{2} fh\right\} + 3m\left(\frac{h}{2}\right)\left\{\frac{1}{2} fh\right\}^2 + n\left\{\frac{1}{2} fh\right\}^3\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv f + \left[\,\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bfh + \frac{1}{4}b(a+bf)h^2 + \frac{1}{16}b(c+2df+ef^2)h^3\,\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{4}ch^2 + \frac{1}{2}dfh^2 + \frac{1}{4}d(a+bf)h^3 + \frac{1}{4}ef^2h^2 + \frac{1}{4}(a+bf)fh^3\,\Big] \\
&\quad + \frac{1}{48}\,\big[\,(k+3\ell f+3mf^2+nf^3)h^3\,\big] \\
&\equiv f + \frac{1}{2}\Big(a+bf\Big)h + \frac{1}{8}\Big(2b(a+bf)+(c+2df+ef^2)\Big)h^2 \\
&\quad + \frac{1}{48}\Big(3b(c+2df+ef^2)+6d(a+bf) \\
&\qquad\qquad\qquad + 6ef(a+bf)+(k+3\ell f+3mf^2+nf^3\Big)h^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= y + h\tilde{f} \\
&\equiv y + \left\{fh + \frac{1}{2}\Big(a+bf\Big)h^2 + \frac{1}{8}\Big(2b(a+bf)+(c+2df+ef^2)\Big)h^3\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{f} &\equiv f\,(x+h, y+\{\text{as above}\}) \\
&\equiv f + \Big[\,ah + b\{\cdots\}\,\Big] + \frac{1}{2}\Big[\,ch^2 + 2dh\{\cdots\} + e\{\cdots\}^2\,\Big] \\
&\quad + \frac{1}{6}\Big[\,kh^3 + 3\ell h^2\{\cdots\} + 3mh\{\cdots\}^2 + n\{\cdots\}^3\,\Big] \\
&\equiv f + \Big[\,ah + b\{\cdots\}\,\Big] \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big[\,ch^2 + 2dh\left\{fh + \frac{1}{2}\Big(a+bf\Big)h^2\right\} \\
&\qquad\qquad + e\{(fh)^2 + (fh)(a+bf)h^2\}\,\Big] \\
&\quad + \frac{1}{6}\Big[\,kh^3 + 3\ell h^2\{fh\} + 3mh\{fh\}^2 + n\{fh\}^3\,\Big] \\
&\equiv f + \Big[\,ah + bfh + \frac{1}{2}b\Big(a+bf\Big)h^2 + \frac{1}{8}b\Big(2b(a+bf)+(c+2df+ef^2)\Big)h^3\,\Big] \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big[\,ch^2 + 2dfh^2 + d(a+bf)h^3 + ef^2h^2 + ef(a+bf)h^3\}\,\Big] \\
&\quad + \frac{1}{6}\Big[\,(k+3\ell f+3mf^2+nf^3)h^3\,\Big] \\
&\equiv f + \Big(a+bf\Big)h + \frac{1}{2}\Big(b(a+bf)+(c+2df+e^2f)\Big)h^2 \\
&\quad + \frac{1}{24}\Big(6b^2(a+bf)+3b(c+2df+ef^2)+12d(a+bf) \\
&\qquad\qquad\qquad + 12ef(a+bf)+4(k+3\ell f+3mf^2+nf^3)\Big)h^3
\end{aligned}
$$

5° 以上から

$$y_1 = y + \frac{h}{6}\Big(f + 2\hat{f} + 2\tilde{f} + \bar{f}\Big)$$

の h に関する展開式において、

$$\begin{aligned}
h \text{ の係数} &= \frac{1}{6}\Big(f + 2f + 2f + f\Big) = f = y' \\
h^2 \text{ の係数} &= \frac{1}{6}\Big(2 \times \frac{1}{2}(a+bf) + 2 \times \frac{1}{2}(a+bf) + (a+bf)\Big) = \frac{1}{2}(a+bf) = \frac{1}{2}y'' \\
h^3 \text{ の係数} &= \frac{1}{6}\Big(2 \times \frac{1}{8}\Big(c + 2df + ef^2\Big) + 2 \times \frac{1}{8}\Big(2b(a+bf) + (c+2df+ef^2)\Big) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\Big(b(a+bf) + (c + 2df + e^2 f)\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{24}\Big((c+2df+ef^2) + 2b(a+bf) + (c+2df+ef^2) \\
&\qquad + 2b(a+bf) + 2(c+2df+ef^2)\Big) \\
&= \frac{1}{6}\Big(ab + b^2 f + c + 2df + ef^2\Big) = \frac{1}{6}y''' \\
h^4 \text{ の係数} &= \frac{1}{6}\Big(2 \times \frac{1}{48}\Big(k + 3\ell f + 3mf^2 + nf^3)\Big) \\
&\quad + 2 \times \frac{1}{48}\Big(3b(c+2df+ef^2) + 6d(a+bf) \\
&\qquad\qquad + 6ef(a+bf) + (k + 3\ell f + 3mf^2 + nf^3\Big) \\
&\qquad + \frac{1}{24}\Big(6b^2(a+bf) + 3b(c+2df+ef^2) + 12d(a+bf) \\
&\qquad\qquad + 12f(a+bf) + 4(k + 3\ell f + 3mf^2 + nf^3)\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{6 \times 24}\Big(6(k + 3\ell f + 3mf^2 + nf^3) + 6b(c+2df+ef^2) \\
&\qquad + 18d(a+bf) + 6ef(a+bf) + 6b^2(a+bf) + 12f(a+bf)\Big) \\
&= \frac{1}{24}\Big((k + 3\ell f + 3mf^2 + nf^3) + b(c+2df+ef^2) \\
&\qquad + 3d(a+bf) + ef(a+bf) + b^2(a+bf) + 2ef(a+bf)\Big) \\
&= \frac{1}{24}\Big((k + bc + 3ad + ab^2) + (3\ell + 5bd + 3ae + b^3)f \\
&\qquad + (3m + 4be)f^2 + nf^3\Big) \\
&= \frac{1}{24}y^{(4)}
\end{aligned}$$

これは $y(x_1) = y(x_0 + h)$ の展開式

$$y(x_0 + h) = y + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{6}y'''h^3 + \frac{1}{24}y^{(4)}h^4 + \cdots$$

と h^4 の項まで一致している。(証明終)