

# 数値解析 (塩田)

— Jacobi 法・Gauss-Seidel 法 —

状況設定  $A = (a_{ij})$  を  $n$  次行列、 $b = (b_i)$  を  $n$  次ベクトルとすると、連立一次方程式

$$Ax = b$$

の解に収束する様なベクトルの列  $\{x^{(k)}\}_{k=0,1,\dots}$  を作りたい。

## 1. Jacobi 法

Jacobi 法のアイデア  $Ax = b$  を

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 - (0 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ a_{22}x_2 = b_2 - (a_{21}x_1 + 0 + \dots + a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + 0) \end{cases}$$

と変形する。右辺に  $x^{(k)}$  のデータを入れて、左辺から「新しい  $x^{(k+1)}$ 」を計算しよう。

Jacobi 法のアルゴリズム  $x^{(k)}$  の成分を  $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$  と書いて、

$x^{(0)} :=$  適当なベクトル ;

$k := 0$  ;

**repeat**

**for**  $i := 1$  **to**  $n$  **do**

$$x_i^{(k+1)} := \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right\} / a_{ii} ; \quad \dots \dots (*)$$

$k := k + 1$  ;

**until** (終了条件) ;

実行例 連立一次方程式  $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$  に対して Jacobi 法を適用すると、(\*) は

$$\begin{cases} \text{新 } x = \frac{1}{3}(1 + 2 \times \text{旧 } y) \\ \text{新 } y = \frac{1}{3}(4 - \text{旧 } x) \end{cases}$$

となり、

```
Step 0 : x = ( 0.00000, 0.00000 )
Step 1 : x = ( 0.33333, 1.33333 )
Step 2 : x = ( 1.22222, 1.22222 )
Step 3 : x = ( 1.14815, 0.92593 )
Step 4 : x = ( 0.95062, 0.95062 )
Step 5 : x = ( 0.96708, 1.01646 )
Step 6 : x = ( 1.01097, 1.01097 )
Step 7 : x = ( 1.00732, 0.99634 )
Step 8 : x = ( 0.99756, 0.99756 )
Step 9 : x = ( 0.99837, 1.00081 )
Step10 : x = ( 1.00054, 1.00054 )
Step11 : x = ( 1.00036, 0.99982 )
Step12 : x = ( 0.99988, 0.99988 )
Step13 : x = ( 0.99992, 1.00004 )
Step14 : x = ( 1.00003, 1.00003 )
Step15 : x = ( 1.00002, 0.99999 )
Step16 : x = ( 0.99999, 0.99999 )
```

収束しない例 同じ方程式でも、式を入れ替えて  $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$  とすると

```
Step 0 : x = ( 0.00000, 0.00000 )
Step 1 : x = ( 4.00000, -0.50000 )
Step 2 : x = ( 5.50000, 5.50000 )
Step 3 : x = ( -12.50000, 7.75000 )
Step 4 : x = ( -19.25000, -19.25000 )
Step 5 : x = ( 61.75000, -29.37500 )
Step 6 : x = ( 92.12500, 92.12500 )
Step 7 : x = ( -272.37500, 137.68750 )
Step 8 : x = ( -409.06250, -409.06250 )
Step 9 : x = ( 1231.18750, -614.09375 )
Step10 : x = ( 1846.28125, 1846.28125 )
Step11 : x = ( -5534.84375, 2768.92188 )
Step12 : x = ( -8302.76562, -8302.76562 )
Step13 : x = ( 24912.29688, -12454.64844 )
Step14 : x = ( 37367.94531, 37367.94531 )
Step15 : x = ( -112099.83594, 56051.41797 )
Step16 : x = ( -168150.25391, -168150.25391 )
Step17 : x = ( 504454.76172, -252225.88086 )
Step18 : x = ( 756681.64258, 756681.64258 )
Step19 : x = ( -2270040.92773, 1135021.96387 )
Step20 : x = ( -3405061.89160, -3405061.89160 )
```

となって収束しなくなる。

反復行列 Jacobi 法の  $k$  ステップ目の誤差ベクトルを

$$e^{(k)} := x^{(k)} - x$$

と置くと、

$$e^{(k+1)} = He^{(k)} \quad \dots \dots (\clubsuit)$$

が成り立つ。ただし  $H$  は「反復行列」と呼ばれる行列で

$$H = -D^{-1}(A - D), \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ベクトルや行列に大きさ (ノルム) を定義すると収束性が議論できる。

定義 次の性質をもつ関数  $|v|$  を  $n$  項ベクトル  $x = (x_i)$  のノルムと言う。

- (1)  $|x| \geq 0$  (等号は  $x = \mathbf{0}$  ) .
- (2) スカラー  $\alpha$  に対して  $|\alpha x| = |\alpha| \times |x|$  .
- (3)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  .

また  $\|A\| := \max_{x \neq \mathbf{0}} \frac{|Ax|}{|x|}$  を  $n$  次行列  $A = (a_{ij})$  のノルムと言う。

例 次の 3 種類がよく使われる。

- (1)  $|x|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ ,  $\|A\|_1 = \max_j \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$  .
- (2)  $|x|_2 := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$ ,  $\|A\|_2 = \max_k (\mu_k)^{1/2}$   
(  $\mu_k$  は  $\overline{tAA}$  の固有値 ) .
- ( $\infty$ )  $|x|_\infty := \max_i |x_i|$ ,  $\|A\|_\infty = \max_i \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$  .

命題 上の例のいずれのノルムについても次が成り立つ。

- (1)  $|x_i| \leq |x|$  .
- (2)  $|Ax| \leq \|A\| \times |x|$  .
- (3)  $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$  .

定理 A 各  $i$  について

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

が成り立てば Jacobi 法は収束する。(条件から  $\|H\|_\infty < 1$  が言え、 $(\clubsuit)$  と命題から直ちに示される。)

## 2. Gauss-Seidel 法

Gauss-Seidel 法のアイデア (\*) では  $x_i^{(k+1)}$  を計算するときに全て古い  $x_j^{(k)}$  を使っている。折角  $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$  は計算してあるのだから、これを活かしてやろう。

Gauss-Seidel 法のアルゴリズム (\*) の代わりに次の式を用いる：

$$x_i^{(k+1)} := \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right\} / a_{ii} ; \quad \dots \dots (*)$$

実行例  $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$  を解く。

| Jacobi 法                            | Gauss-Seidel 法                      |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Step 0 : $x = ( 0.00000, 0.00000 )$ | Step 0 : $x = ( 0.00000, 0.00000 )$ |
| Step 1 : $x = ( 0.33333, 1.33333 )$ | Step 1 : $x = ( 0.33333, 1.22222 )$ |
| Step 2 : $x = ( 1.22222, 1.22222 )$ | Step 2 : $x = ( 1.14815, 0.95062 )$ |
| Step 3 : $x = ( 1.14815, 0.92593 )$ | Step 3 : $x = ( 0.96708, 1.01097 )$ |
| Step 4 : $x = ( 0.95062, 0.95062 )$ | Step 4 : $x = ( 1.00732, 0.99756 )$ |
| Step 5 : $x = ( 0.96708, 1.01646 )$ | Step 5 : $x = ( 0.99837, 1.00054 )$ |
| Step 6 : $x = ( 1.01097, 1.01097 )$ | Step 6 : $x = ( 1.00036, 0.99988 )$ |
| Step 7 : $x = ( 1.00732, 0.99634 )$ | Step 7 : $x = ( 0.99992, 1.00003 )$ |
| Step 8 : $x = ( 0.99756, 0.99756 )$ | Step 8 : $x = ( 1.00002, 0.99999 )$ |
| Step 9 : $x = ( 0.99837, 1.00081 )$ | Step 9 : $x = ( 1.00000, 1.00000 )$ |
| Step10 : $x = ( 1.00054, 1.00054 )$ |                                     |
| Step11 : $x = ( 1.00036, 0.99982 )$ |                                     |
| Step12 : $x = ( 0.99988, 0.99988 )$ |                                     |
| Step13 : $x = ( 0.99992, 1.00004 )$ |                                     |
| Step14 : $x = ( 1.00003, 1.00003 )$ |                                     |
| Step15 : $x = ( 1.00002, 0.99999 )$ |                                     |
| Step16 : $x = ( 0.99999, 0.99999 )$ |                                     |

定理 B 定理 A の条件が成り立てば Gauss-Seidel 法も収束する。

証明 Jacobi 法の反復行列を  $H = (h_{ij})$  と表し、また簡単のため Gauss-Seidel 法の  $k$  ステップ目、 $k+1$  ステップ目の誤差ベクトルを

$$e^{(k)} = e = (e_i), \quad e^{(k+1)} = f = (f_i)$$

と表す。Gauss-Seidel 法の  $i$  行目は

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}$$

と書け、解  $x$  の満たす式

$$a_{ii}x_i = b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j - \sum_{j>i} a_{ij}x_j$$

と辺々引けば

$$a_{ii}f_i = -\sum_{j<i} a_{ij}f_j - \sum_{j>i} a_{ij}e_j$$

が得られる。両辺を  $a_{ii}$  で割ることにより

$$f_i = \sum_{j<i} h_{ij}f_j + \sum_{j>i} h_{ij}e_j$$

を得る。これを用いて  $|f_i| \leq \|H\|_\infty \times |e|_\infty$  を示そう。まず  $|f_1|$  は

$$\begin{aligned} |f_1| &\leq \sum_{j>1} |h_{1j}| \times |e_j| \\ &\leq \sum_{j>1} |h_{1j}| \times |e|_\infty \\ &\leq \|H\|_\infty \times |e|_\infty < |e|_\infty \end{aligned}$$

を満たす。すると  $|f_2|$  は

$$\begin{aligned} |f_2| &\leq |h_{21}| \times |f_1| + \sum_{j>2} |h_{2j}| \times |e_j| \\ &\leq |h_{21}| \times |e|_\infty + \sum_{j>2} |h_{2j}| \times |e|_\infty \\ &= \sum_{j \neq 2} |h_{2j}| \times |e|_\infty \\ &\leq \|H\|_\infty \times |e|_\infty < |e|_\infty \end{aligned}$$

以下帰納的に

$$\begin{aligned} |f_i| &\leq \sum_{j<i} |h_{ij}| \times |f_j| + \sum_{j>i} |h_{ij}| \times |e_j| \\ &\leq \sum_{j<i} |h_{ij}| \times |e|_\infty + \sum_{j>i} |h_{ij}| \times |e|_\infty \\ &= \sum_{j \neq i} |h_{ij}| \times |e|_\infty \\ &\leq \|H\|_\infty \times |e|_\infty < |e|_\infty \end{aligned}$$

が示される。従って

$$|f|_\infty = \max_i |f_i| \leq \|H\|_\infty \times |e|_\infty$$

記号を元へ戻せば

$$|e^{(k+1)}|_\infty \leq \|H\|_\infty \times |e^{(k)}|_\infty$$

となり

$$|e^{(k)}|_\infty \leq (\|H\|_\infty)^k \times |e^{(0)}|_\infty \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad \square$$