数値解析　(塩田)

— LU 分解 —

Step 1 の目標

n 次正則行列 A を次の形に分解する:

$$A = LU,$$

$$L = \begin{pmatrix} \ell_{11} & & & \text{\Large O} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{\Large O} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Step 1 の手順

$A = LU$ の成分を 1 行目から $\begin{pmatrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \vdots \\ \longrightarrow \end{pmatrix}$ の順に見てゆくと、i 行目では

$$\ell_{i1}, \cdots, \ell_{ii}, \quad u_{i,i+1}, \cdots, u_{in}$$

の順に未知数がわかってゆく:

1 行目:
$$\underline{a_{11}} = \boxed{\ell_{11}}$$
$$\underline{a_{12}} = \underline{\ell_{11}} \times \boxed{u_{12}}$$
$$\underline{a_{13}} = \underline{\ell_{11}} \times \boxed{u_{13}}$$
$$\vdots$$

2 行目:
$$\underline{a_{21}} = \boxed{\ell_{21}}$$
$$\underline{a_{22}} = \underline{\ell_{21}} \times \underline{u_{12}} + \boxed{\ell_{22}}$$
$$\underline{a_{23}} = \underline{\ell_{21}} \times \underline{u_{13}} + \underline{\ell_{22}} \times \boxed{u_{23}}$$
$$\underline{a_{24}} = \underline{\ell_{21}} \times \underline{u_{14}} + \underline{\ell_{22}} \times \boxed{u_{24}}$$
$$\vdots$$

i 行目: $j \leq i$ のとき

$$\underline{a_{ij}} = \sum_{1 \leq k < j} \underline{\ell_{ik}} \times \underline{u_{kj}} + \boxed{\ell_{ij}}$$

(ℓ_{ik} たちは $j-1$ 列目までに求まっていて、
u_{kj} たちは $i-1$ 行目までに求まっている。)

$i < j$ のとき

$$\underline{a_{ij}} = \sum_{1 \leq k < i} \underline{\ell_{ik}} \times \underline{u_{kj}} + \underline{\ell_{ii}} \times \boxed{u_{ij}}$$

(ℓ_{ik} たちは i 列目までに全て求まっていて、
u_{kj} たちは $i-1$ 行目までに求まっている。)

Step 1 のアルゴリズム ver.1:

$A=(a_{ij})$, $L=(\ell_{ij})$, $U=(u_{ij})$ として、

for $i := 1$ **to** n **do begin**

for $j := 1$ **to** i **do**

$$\ell_{ij} := a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \ ;$$

for $j := i+1$ **to** n **do**

$$u_{ij} := \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj} \right) \Big/ \ell_{ii}$$

end;

Step 1 のアルゴリズム ver.2:

メモリ節約の為に L, U の為の変数を使わない方法。$A=(a_{ij})$ について次の手続きを行うと、最終的に

$$\begin{cases} \ell_{ij} = a_{ij} & (\ i \geqq j \text{ のとき }) \\ u_{ij} = a_{ij} & (\ i < j \text{ のとき }) \end{cases}$$

となっている。

for $k := 1$ **to** $n-1$ **do begin**

$c := a_{kk}$ **;**

for $j := k+1$ **to** n **do**

$a_{kj} := a_{kj}/c$ **;**

for $i := k+1$ **to** n **do**

for $j := k+1$ **to** n **do**

$a_{ij} := a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$

end;