

数値解析 (塩田)

— 行列の固有値・固有ベクトルを求める直接法 —

固有値・固有ベクトル

n 次正方行列 A に対し、

$$Av = \lambda v$$

を満たすスカラー λ とベクトル v ($v \neq 0$) をそれぞれ A の固有値・固有ベクトルと言う。

直接法

1° A の固有多項式

$$\varphi(x) = \det(xE - A) = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n$$

を求める。

2° ニュートン法などを用いて方程式 $\varphi(x) = 0$ を解く。解 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が固有値になる。

3° 各 j について連立一次方程式 $(\lambda_j E - A)v = 0$ の 0 でない解 $v = v_j$ を求める。(例えば v_n に乱数を入れて v_1, v_2, \dots, v_{n-1} についての連立一次方程式を立てれば、たいていガウスの消去法が使える。)

Frame 法

A の固有多項式 $\varphi(x)$ は、次のアルゴリズムを用いれば数式処理ソフトを使わずに計算できる：

アルゴリズム

```
X := E ;
for k := 1 to n do begin
  X := AX ;
   $c_k := -(X \text{ の対角成分和 }) / k ;$ 
  X := X +  $c_k E$  ;
end;
```

実行例

```
A :
  1.0000000    1.0000000   -1.0000000
  3.0000000    4.0000000    3.0000000
  1.0000000    0.0000000   -3.0000000

X :
  1.0000000    1.0000000   -1.0000000
  3.0000000    4.0000000    3.0000000
  1.0000000    0.0000000   -3.0000000

c[1] = -2.000000

X :
  1.0000000    3.0000000    7.0000000
 12.0000000   11.0000000   -6.0000000
 -4.0000000    1.0000000   14.0000000

c[2] = -13.000000

X :
  4.0000000    0.0000000    0.0000000
  0.0000000    4.0000000    0.0000000
  0.0000000    0.0000000    4.0000000

c[3] = -4.000000
```