応用線形代数演習 I (塩田教官)　　1999 年 7 月 12 日のレポート

学生番号　　　　　　　　氏名

【例題 1】 実係数多項式のなす実ベクトル空間 $\mathbf{R}[x]$ において、ベクトルの組

$$x+1, \quad x-1, \quad x^2-1$$

は一次独立であることを示せ。

【略解】『 恒等式 $c_1(x+1)+c_2(x-1)+c_3(x^2-1)=0$ が成り立つとき、$c_1=c_2=c_3=0$ である 』ことを示せば良い。

$$c_1(x+1)+c_2(x-1)+c_3(x^2-1)=0$$

に $x=1$ を代入すると $c_1\times 2=0$. 従って

$$c_1=0 \quad \text{かつ} \quad c_2(x-1)+c_3(x^2-1)=0.$$

更に $x=-1$ を代入すると $c_2\times(-2)=0$. 従って

$$c_2=0 \quad \text{かつ} \quad c_3(x^2-1)=0.$$

故に $c_3=0$. □

【問題 1】 実係数多項式のなす実ベクトル空間 $\mathbf{R}[x]$ において、ベクトルの組

$$x^2, \quad (x-1)^2, \quad (x-2)^2$$

は一次独立であることを示せ。

【例題 2】実数係数の多項式の成す実ベクトル空間 $\mathbf{R}[x]$ において、部分集合

$$W := \{\, f(x) \in \mathbf{R}[x] \mid f(1) = 0 \,\}$$

は部分空間であることを示せ。

【略解】『$f(x),\, g(x) \in W,\, k,\, \ell \in \mathbf{R}$ とするとき、$kf + \ell g \in W$ である』ことを示せば良い。

$f(x),\, g(x) \in W$ ならば $f(1) = g(1) = 0$ であるから、$(kf+\ell g)(1) = kf(1)+\ell g(1) = k\,0+\ell\,0 = 0$. 従って $kf + \ell g \in W$. □

【問題 2】実数係数の多項式の成す実ベクトル空間 $\mathbf{R}[x]$ において、部分集合

$$W := \left\{ f(x) \in \mathbf{R}[x] \;\middle|\; \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \right\}$$

は部分空間であることを示せ。

【問題 3】次に挙げる実ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ の部分集合 W はいずれも $\mathbf{R}^2$ の部分空間にならない。その理由を述べよ。

(1) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; xy \geqq 0 \right\}$

(2) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \text{ は共に有理数} \right\}$