

学生番号

氏名

【置換の積の計算法】 積の計算は定義に従って 1 から  $n$  の像を調べる。(この授業では右が先。左を先にする流儀もある。)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

なぜなら、 $1 \mapsto 2 \mapsto 3$ ,  $2 \mapsto 1 \mapsto 2$ . 1 と 2 の像がわかったので 3 の像は自動的に 1 になる。

【問題 1】 次の置換の積を計算せよ。

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3 =$$

【逆置換の計算法】 (1) 置換が  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$  と表されているときは、上下の数字を入れ替える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) 巡回置換  $(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$  の逆置換は数字の順番を逆にする。

$$(1 \ 3 \ 5 \ 4)^{-1} = (4 \ 5 \ 3 \ 1).$$

(3) 互換は自分自身が逆置換 :  $(i \ j)^{-1} = (i \ j)$ .

(4) 置換が互換の積で表されているときは、逆順で互換の積を作る。

$$\sigma = (1 \ 3)(2 \ 5)(4 \ 6) \implies \sigma^{-1} = (4 \ 6)(2 \ 5)(1 \ 3).$$

【問題 2】 次の置換の逆置換を求めよ。

$$(1) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \sigma = (1 \ 2 \ 3 \ 4) \in S_4$$

$$(3) \quad \sigma = (1 \ 2)(3 \ 4)(1 \ 3) \in S_4$$

【置換を互換の積として表す方法】  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  を例に挙げて説明する。

(1) 左端の列のふたつの数字を入れ替える互換を左から掛けると

$$(1 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

となり、1を動かさない置換ができる。

(2) 更に左から2番目の列のふたつの数字を入れ替える互換を左から掛けると

$$(2 \ 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (3 \ 4)$$

となり、1も2も動かさない置換(互換(3 4))ができる。

(3) 以上から  $(2 \ 4)(1 \ 3) \sigma = (3 \ 4)$ .

$$\therefore \sigma = (1 \ 3)^{-1}(2 \ 4)^{-1}(3 \ 4) = (1 \ 3)(2 \ 4)(3 \ 4).$$

【問題3】置換  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  を互換の積の形に表し、その符号を求めよ。