応用線形代数演習 I (塩田教官)　　1999 年 4 月 19 日のレポート

学生番号　　　　　　　　氏名

【問題 1】次の行列のうち対角行列、上 (下) 三角行列、対称行列、交代行列であるものをそれぞれ述べよ。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角行列　：

上三角行列：

下三角行列：

対称行列　：

交代行列　：

【例題 1】交代行列の対角成分は全て 0 であることを示せ。

【解】n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が交代行列であるとする。${}^tA = -A$ ゆえ

$$A \text{ の } (i,i) \text{ 成分} = {}^tA \text{ の } (i,i) \text{ 成分} = (-A) \text{ の } (i,i) \text{ 成分}.$$

従って $a_{ii} = -a_{ii}$ となり $a_{ii} = 0$ を得る。

【問題 2】対称行列 A が同時に交代行列でもあれば $A = O$ であることを示せ。

【例題 2】$A=(a_{ij})$ を (m,n) 行列とするとき、m 次行列 $A\,{}^tA$ の (i,i) 成分を a_{ij} を用いて表せ。

【解】

$$\begin{aligned} A\,{}^tA \text{ の } (i,i) \text{ 成分} &= \sum_{k=1}^{n} A \text{ の } (i,k) \text{ 成分}) \times {}^tA \text{ の } (k,i) \text{ 成分} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A \text{ の } (i,k) \text{ 成分}) \times A \text{ の } (i,k) \text{ 成分} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik})^2. \end{aligned}$$

【問題 3】$A=(a_{ij})$ を実 (m,n) 行列とする。

(1) $\mathrm{tr}\,(A\,{}^tA)$ を a_{ij} を用いて表せ。

(2) $\mathrm{tr}\,(A\,{}^tA)=0$ ならば $A=O$ であることを示せ。