応用線形代数演習 I（塩田教官） No.12

テーマ：一般のベクトル空間とその部分空間

【体の定義】 四則演算（加減乗除）が定義されている数の集合を **体 (たい)** という。実数全体の集合 $\mathbf{R}$、複素数全体の集合 $\mathbf{C}$、有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ はいずれも体である。

【ベクトル空間の定義】 $\mathbf{K}$ を体とする。（わかりにくければ $\mathbf{K}$ は実数体 $\mathbf{R}$ だと思って以下の文章を理解しなさい。）

- 集合 V に **和** と **$\mathbf{K}$ の元によるスカラー倍** が定義されているとき、V を $\mathbf{K}$ 上の **ベクトル空間**（または **線形空間**）と言う。
- $\mathbf{K}$ の元を**スカラー**、V の元を**ベクトル**と呼ぶ。
- 実数体上のベクトル空間を **実ベクトル空間**、複素数体上のベクトル空間を **複素ベクトル空間** とも呼ぶ。

【数ベクトル空間】 $\mathbf{K}$ の元を成分にもつ n 項列ベクトル全体の集合を $\mathbf{K}^n$ と書く。$\mathbf{K}^n$ は通常の和とスカラー倍によって $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間となる。これを **数ベクトル空間** と呼ぶ。

【関数の空間】
- 「実数上で定義された関数全体の集合」を V とし、V に和と実数倍を次で定義する：
$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (cf)(x) := cf(x) \qquad (f, g \in V,\, c \in \mathbf{R})$$
このとき V は実ベクトル空間になり、定数関数 0 が V のゼロベクトルである。
- 連続関数全体の集合、微分可能な関数全体の集合なども実ベクトル空間になる。

【多項式の空間】
- 文字 x の $\mathbf{K}$-係数多項式全体の集合を $\mathbf{K}[x]$ と書く。$\mathbf{K}[x]$ は多項式としての和とスカラー倍によって $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間になる。
- また n 次以下の $\mathbf{K}$-係数多項式全体の集合 $\mathbf{K}_n[x]$ も $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間になる。

【数列の空間】 添字 0 から始まる数列全体の集合 V に和とスカラー倍を
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \{\, a_n + b_n \,\}_{n=0,1,\cdots} \quad k\,\boldsymbol{a} = \{\, k\,a_n \,\}_{n=0,1,\cdots}$$
$$(\ \boldsymbol{a} = \{\, a_n \,\}_{n=0,1,\cdots},\ \boldsymbol{b} = \{\, b_n \,\}_{n=0,1,\cdots} \in V\ )$$
で定義すると V はベクトル空間になる。

【線形的概念】 これら一般のベクトル空間に対しても、一次結合、一次独立性、一次従属性、などの概念を考える。

- $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間 V のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ に対し、
$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m \quad (\, c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbf{K}\,)$$
と表されるベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の**一次結合** と言う。
- $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の一次結合として表されるベクトル全体の集合を $\langle\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \,\rangle$ と表し、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ **の生成する部分空間**と呼ぶ。

- スカラー $c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbf{K}$ について

$$「c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \mathbf{0} \implies c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0」$$

  が成り立つとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ は **一次独立** であると言う。そうでないとき **一次従属** と言う。

【129〜132】 実数上の実数値関数のなす実ベクトル空間 V において、次のベクトルの組は一次独立であることを示せ。

【129】 $\sin x, \cos x, \sin(2x)$　　**【130】** $2^x, 3^x, 4^x$

【131】 $x^2, e^x, \sin x$　　**【132】** $\sin x, \sin(\sin x)$

【133】 n を自然数とする。実係数多項式のなす実ベクトル空間 $\mathbf{R}[x]$ において

$$x^n, \quad (x-1)^n, \quad \cdots, \quad (x-n)^n$$

は一次独立であることを示せ。

【部分空間】 $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間 V の部分集合 W がそれ自体、和とスカラー倍で閉じているとき、W は V の **部分ベクトル空間**（または単に **部分空間**）であると言う。

【命題】 $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間 V の部分集合 W について次は同値。

(1) W は V の部分空間。

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W, \quad k \in \mathbf{K} \quad \implies \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$ かつ $k\,\boldsymbol{a} \in W$

(3) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W, \quad k, \ell \in \mathbf{K} \quad \implies \quad k\,\boldsymbol{a} + \ell\,\boldsymbol{b} \in W$

【例】
- (m,n) 行列 A に対し、連立一次方程式の解空間　$\{\,\boldsymbol{x} \in \mathbf{K}^n \mid A\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\,\}$　は $\mathbf{K}^n$ の部分空間である。
- 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ の部分空間は、原点、原点を通る直線、原点を通る平面、空間全体のいずれかである。
- $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \in V$ に対し、$\langle\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \,\rangle$ は部分空間になる。

【134〜135】 U, W を共に $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間 V の部分空間とするとき、次を示せ。

【134】 $U \cap W$ も V の部分空間である。

【135】 U と W の元の和として表せるベクトル全体の集合を

$$U + W = \{\, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{a} \in U,\ \boldsymbol{b} \in W \,\}$$

という記号で表すとき、$U + W$ は V の部分空間になる。（$U + W$ を **U と V の和空間** と呼ぶ。）

【136】 U, W を共に V の部分空間とする。U と W の合併集合 $U \cup W$ が V の部分空間であれば、$U \subseteq W$ または $W \subseteq U$ が成り立つことを示せ。