応用線形代数演習 I (塩田教官) **No.11**

テーマ：小行列式と階数と一次独立性の関係、連立一次方程式の解空間

【小行列式】行列 A から s 個の行の s 個の列を取り出して作った s 次行列を **A の s 次小行列**、またその行列式を **A の s 次小行列式** と言う。

【定理 A】行列 A に対して次の数は全て等しい。

(1) $\mathrm{rank}(A)$

(2) A の s 次小行列式のうち 0 でないものが存在する様な最大の s

(3) A の一次独立な列ベクトルの最大個数

(4) A の一次独立な行ベクトルの最大個数

【系 B】$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbf{R}^n$ に対して次は同値。

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ は一次独立。

(2) $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_k)$ と置くとき $\mathrm{rank}(A) = k$

【例】$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする。先ず計算により $|A| = 0$ がわかるので $\mathrm{rank}(A) \neq 3$、すなわち $\mathrm{rank}(A) \leqq 2$ である。次に A から第 1,2 行の第 1,2 列を取り出して作った行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ を考えると、その行列式は $-1 \neq 0$ なので $\mathrm{rank}(A) = 2$ がわかる。

【120〜122】【例】の方法に倣って次の行列の階数を計算せよ。

【120】 $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$ **【121】** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ **【122】** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

【123】 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} ad & ae & af \\ bd & be & bf \\ cd & ce & cf \end{pmatrix}$ の階数は 0 または 1 であることを示せ。

【124】 4 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ に対して

(1) $\mathrm{rank}(A) = 4$ となるための a の必要十分条件を求めよ。

(2) $\mathrm{rank}(A) = 2$ とはならないことを示せ。

【解空間】A を (m, n) 行列とするとき、連立一次方程式

$$(*) \qquad A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の解ベクトル全体の集合

$$W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \,\}$$

を $(*)$ の **解空間** という。

【命題 C】上の W について

$$(1)\quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W \implies \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W \qquad (2)\quad \boldsymbol{x} \in W,\ k:\text{スカラー} \implies k\boldsymbol{x} \in W$$

が成り立つ。(この性質は **ベクトル空間** として一般化されることになる。)

【定理 D】A が $A = \begin{pmatrix} E_r & B \\ O & O \end{pmatrix}$ (B : $(r, n-r)$ 行列) の形であるとする。このとき $\begin{pmatrix} -B \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$ の列ベクトル表示を

$$\begin{pmatrix} -B \\ E_{n-r} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{b}_1\, \boldsymbol{b}_2 \cdots \boldsymbol{b}_{n-r})$$

と置けば、

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-r}$ の一次結合。

(2) 解空間 $W = \langle\, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-r}\,\rangle$

【定理 E】一般の (m, n) 行列 A に対して、方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間は

$$W = \langle\, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{n-r}\,\rangle$$

と表される。ただし $r = \mathrm{rank}(A)$ で、, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ は一次独立。

【定理 E のアルゴリズム】 (1) A に行基本変形を施して階段行列に変形したのち、列の入れ替えを行なって $A \longrightarrow \begin{pmatrix} E_r & B \\ O & O \end{pmatrix}$ とする。このとき、列の入れ替えの行列 Q を記憶しておく。

(2) 【定理 D】 の $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-r}$ を計算する。

(3) $\boldsymbol{u}_1 = Q\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_{n-r} = Q\boldsymbol{b}_{n-r}$ とおく。

【125〜128】次の行列 A について、連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間 $W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\,\}$ を

$$W = \langle\, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{n-r}\,\rangle$$

の形で記述せよ。

【125】 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

【126】 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

【127】 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

【128】 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$