応用線形代数演習 I（塩田教官）　No.9

テーマ：余因子・余因子行列、クラメルの公式、ファン・デル・モンドの行列式

以下、本プリントでは行列のサイズ n は $n \geqq 2$ とする。

【余因子・余因子行列】 $A = (a_{ij})$ を n 次行列とする。

- A から第 i 行と第 j 列を取り除いてできる $(n-1)$ 次行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けた数を A の (i, j) **余因子** と呼び、通常 $\tilde{a}_{ij}$ と書く。
- $\tilde{a}_{ij}$ を (j, i) 成分とする n 次行列 $\tilde{A} = \mathrm{adj}(A) = (\tilde{a}_{ji})$ を A の**余因子行列** と呼ぶ。

【注意】
- 余因子行列の定義で i と j を逆にすることは忘れやすいので特に注意。
- $(-1)^{i+j}$ は例えば 3 次行列ならば $\begin{matrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{matrix}$.

【例】
- $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ から第 1 行と第 2 列を取り除くと 1 次行列 (c) が得られ、$(-1)^{1+2} = -1$ ゆえ $\tilde{a}_{12} = -c$. 同様に $\tilde{a}_{11} = d, \tilde{a}_{21} = -b, \tilde{a}_{22} = a$. 従って $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ から第 1 行と第 2 列を取り除くと 2 次行列 $\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix}$ が得られ、その行列式は $di - fg$. $(-1)^{1+2} = -1$ ゆえ $\tilde{a}_{12} = -(di - fg)$ 等々。

【定理 A】 (1)（**行列式の余因子展開**）$|A| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\tilde{a}_{ki}$.

(2) $i \neq j$ ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\tilde{a}_{kj} = 0$.

(3) $A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|\,E_n$.

(4)（**逆行列の公式**）$|A| \neq 0$ ならば A は正則で、$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}$.

【96〜98】 次の行列の余因子行列を計算し、正則な場合はその逆行列を求めよ。

【96】 $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$　**【97】** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　**【98】** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【99】 A が整数成分の n 次正方行列ならば、次の 2 条件は同値であることを示せ。

(1) $|A| = \pm 1$　　(2) A は正則で、A^{-1} の成分も全て整数。

【100〜101】 余因子展開を利用して次の行列式を計算し、答えを因数分解せよ。

【100】 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$　**【101】** $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$

【102〜103】n 次行列 A について次を示せ。

【102】 $|A| = 0$ ならば $|\tilde{A}| = 0$

【103】 (1) $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$ (2) 「 A が正則 」 $\Longleftrightarrow$ 「 $\tilde{A}$ が正則 」

【104〜106】n 次正則行列 A, B について次を示せ。

【104】 $\widetilde{AB} = (\tilde{B})(\tilde{A})$ 【105】 $\widetilde{({}^tA)} = {}^t(\tilde{A})$ 【106】 $\widetilde{(\tilde{A})} = |A|^{n-2}A$

【107*】【104〜106】 は A, B が正則でなくても成立することを示せ。

【定理 B (クラメルの公式)】 $A = (a_{ij}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ を n 次正則行列、$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ を n 項ベクトル、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を未知数の n 項ベクトルとするとき、連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

の解は次の式で求められる：

$$\begin{cases} x_1 = \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \cdots, \boldsymbol{a}_n) / \det(A) \\ x_2 = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_3, \cdots, \boldsymbol{a}_n) / \det(A) \\ \qquad\ddots \\ x_n = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{b}) / \det(A) \end{cases}$$

【108 (ファン・デル・モンドの行列式)】

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i) \quad \text{を示せ。}$$

【109】xy-平面内に x 座標の異なる $n+1$ 個の点 P_0, P_1, $\cdots$, P_n を取るとき、これらの点を全て通る n 次関数 $y = f(x)$ のグラフが唯ひとつ存在することを示せ。