応用線形代数演習 I（塩田教官）　　　　**No.7**

テーマ：行列式の定義と性質、サラスの方法

【行列式の定義】　n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して次の式で定まるスカラーを A の**行列式** と言い、$\det A$、$\det(A)$、$|\,A\,|$、$|\,a_{ij}\,|$ などの記号で表す：

$$|\,A\,| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

ただし Σ は n 文字の置換全てにわたる和である。

（ $a_{\sigma(1)1}, \cdots, a_{\sigma(n)n}$ は n 個の列からひとつずつ成分を取り出して、それが n 個の行にもひとつずつ入っているような成分の取り出し方で、それらの数を掛けて符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を付けて足し合わせたものが行列式である。）

【1 次・2 次・3 次の行列式】　1 次・2 次・3 次の行列式は次のようになる：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a \end{vmatrix} &= a \qquad \text{（絶対値と同じ記号だが区別せよ）} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= ad - bc \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \end{aligned}$$

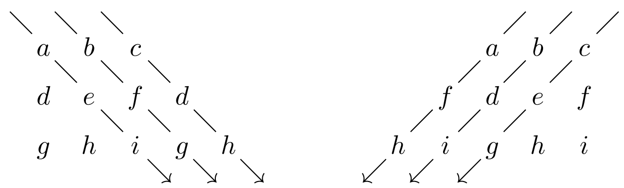
【定理 A】　(1) n 次行列 $A = (a_{ij})$ が対角行列、上三角行列または下三角行列ならば

$$|\,A\,| = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

(2) 特に $|\,E_n\,| = 1, \quad |\,O_n\,| = 0.$

【3 次の行列式の覚え方 (サラスの方法)】　図で右下がりの線上の 3 つの数字を掛けて足し、左下がりの線上の 3 つの数字を掛けて引く。

（ 4 次以上ではこの様な便利な覚え方はない。）



【76〜77】次の行列式をサラスの方法を用いて計算し、答えを因数分解せよ。

【76】 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$　　**【77】** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$　　**【78】** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

【79】全ての成分がそれぞれ 0 か 1 であるような 3 次行列の行列式の最大値は幾らか。

【80】$n \geqq 2$ のとき、全ての成分が奇数である n 次行列の行列式は偶数であることを示せ。

【定理 B】n 次行列 A に対して $|\,{}^t\!A\,| = |\,A\,|$ が成り立つ。すなわち

$$|\,A\,| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

が成り立つ。

【記号】列ベクトル表示が $A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ である様な n 次行列 A の行列式を $|\,A\,| = \det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ とも書く。

【定理 C】上の記号のもとで次が成り立つ。

(1) スカラー λ に対して　$\det(\lambda\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \lambda \det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$.

(2) 第 1 列が $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ と書けているとき、

$$\det(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n).$$

(3) 第 j 列と第 k 列を入れ換えると、

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n).$$

(4) 公式 (1), (2) は他の列についても成り立つ ($\because$ (3)) 。

((1), (2) は **行列式の線形性**、(3) は **行列式の交代性** と呼ばれる。)

【定理 D】上の定理より次が導かれる。

(1) n 次行列 A のひとつの列ベクトルが $\mathbf{0}$ ならば　$|\,A\,| = 0$.

(2) n 次行列 A のふたつの列ベクトルが等しければ　$|\,A\,| = 0$.

(3) n 次行列 $A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ の第 j 列に第 k 列のスカラー倍 $\lambda\boldsymbol{a}_k$ ($k \neq j$) を加えた n 次行列を B とするとき、$|\,A\,| = |\,B\,|$. すなわち

$$\det(\cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots) = \det(\cdots, \boldsymbol{a}_j + \lambda\boldsymbol{a}_k, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots).$$

【定理 E】n 文字の置換 $\rho \in S_n$ に対して

$$\det(\boldsymbol{a}_{\rho(1)}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\rho(n)}) = \mathrm{sgn}(\rho) \det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

が成り立つ。

【定理 F】定理 C, 定理 D, 定理 E は**行ベクトル表示についても** 成り立つ (定理 B より)。

【81】スカラー λ と n 次行列 A に対して $|\,\lambda A\,| = \lambda^n\,|\,A\,|$ を示せ。

【82】n が奇数ならば、n 次交代行列 A に対して $|\,A\,| = 0$ であることを示せ。(このことから奇数次の交代行列は正則ではないことがわかる。)