応用線形代数演習 I（塩田教官） **No.6**

テーマ：写像の全射性・単射性、置換の定義と計算法

—— 次回 **行列式** を定義する為に、今回は置換を学ぶ。 ——

【全射・単射・全単射】 写像 $f : X \longrightarrow Y$ は、

- $\forall y \in Y$ に対し 「 $y = f(x)$ となる $x \in X$ が必ず存在する」 とき、**全射 (ぜんしゃ) である** と言う。
- $\forall y \in Y$ に対し 「 $y = f(x)$ となる $x \in X$ が高々ひとつしか存在しない」 とき、**単射 (たんしゃ) である** と言う。
- 全射であり単射でもある写像を **全単射** または **一対一写像** と言う。

◇ 全単射には逆写像が存在する。

【証明の基本パターン】 • 全射であること：$\forall y \in Y$ に対して $y = f(x)$ を満たす $x \in X$ を提示する。

- 全射でないこと：「 $\forall x \in X$ に対して $y \neq f(x)$ 」 となる $y \in Y$ の例を挙げる。
- 単射であること：式 「 $f(a) = f(b)$ 」 から式 「 $a = b$ 」 を導く。
- 単射でないこと：「 $a \neq b$ かつ $f(a) = f(b)$ 」 なる $a, b \in X$ の例を挙げる。

【59】 任意の集合 X に対して、恒等写像　$f : X \to X;\quad f(x) = x$　は全単射であることを示せ。

【60〜62】 整数全体の集合を $\mathbf{Z}$ と表す。次の式で与えられる写像 $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ について、それぞれ全射であるか否か、単射であるか否か理由を付けて述べよ。

【60】 $f(x) = x^3$　　**【61】** $f(x) = 1 - x$

【62】 $f(x) = \left(\dfrac{x}{2} \text{ を越えない最大の整数} \right)$

【63】 X が有限集合ならば、写像 $f : X \to X$ の全射性と単射性は同値であることを示せ。

【64〜69】 以下、ふたつの写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ を考える。

【64】 f と g が共に全射ならば合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も全射であることを示せ。

【65】 f と g が共に単射ならば合成写像 $g \circ f$ も単射であることを示せ。

【66】 合成写像 $g \circ f$ が全射ならば g は全射であることを示せ。

【67】 合成写像 $g \circ f$ が単射ならば f は単射であることを示せ。

【68】 $g \circ f$ は全射だが f は全射でない様な X, Y, Z, f, g の例を作れ。

【69】 $g \circ f$ は単射だが g は単射でない様な X, Y, Z, f, g の例を作れ。

【注意】 上の問題より次のことがわかる。

(1) f と g が共に全単射ならば合成写像 $g \circ f$ も全単射である。

(2) ふたつの写像 $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow X$ があって、合成写像 $g \circ f : X \to X$ と $f \circ g : Y \to Y$ が共に全単射ならば $f,\ g$ はいずれも全単射である。

【置換】 • 集合 $M=\{1,2,\cdots,n\}$ から M への全単射を **n 文字の置換** と呼ぶ。

- n 文字の置換全体の集合を S_n と書き、**n 次対称群** と呼ぶ。
- $\sigma\in S_n$ が $\sigma(1)=a_1,\ \sigma(2)=a_2,\ \cdots,\sigma(n)=a_n$ なる置換のとき、
$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$$
と表す。(行列の記号とまぎわらしいが、置換は置換と思って計算する。)
- 列の並べ方は自由に変えて良い：$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 等々。
- $a_1\mapsto a_2\mapsto\cdots\mapsto a_m\mapsto a_1$ なる置換 σ を **(長さ m の) 巡回置換** と言い、簡単に $\sigma=(\,a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_m\,)$ と表す。
- $k\mapsto\ell\mapsto k$ なる置換(2 文字のみ入れ換える置換)σ を **互換** と言い、簡単に $\sigma=(\,k\ \ \ell\,)$ と表す。
- 写像の合成により置換の積を定義する：$\sigma\tau:=\sigma\circ\tau$.
この積により、恒等写像 1_M を単位元として S_n は群を成す。

◇ 任意の置換は幾つかの互換の積として表すことができる。

◇ $\sigma\in S_n$ を互換の積として表すとき、互換の個数 s の偶奇は表し方に依らない。このとき $\mathrm{sgn}(\sigma):=(-1)^s$ を σ の **符号** と言う。

- $\mathrm{sgn}(\sigma)=1$ なる置換を **偶置換** 、$\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$ なる置換を **奇置換** と言う。

◇ $\mathrm{sgn}(1_M)=1,\quad \mathrm{sgn}(\sigma\tau)=\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau),\quad \mathrm{sgn}(\sigma)=\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ が成り立つ。

【70】 巡回置換 $\sigma=(\,1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n\,)$ について $\sigma^n=1_M$ を示せ。

【71】 巡回置換 $\sigma=(\,1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n\,)$ の符号を計算せよ。

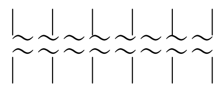
【72】 置換 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ n & n{-}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ の符号を計算せよ。

【73】 $n\geqq 2$ のとき n 文字の偶置換、奇置換はそれぞれ $\dfrac{n!}{2}$ 個ずつあることを示せ。

【74】 任意の置換は $(\,k\ \ k{+}1\,)$ の形の幾つかの互換の積として表すことができることを示せ。

【75】 阿弥陀くじ

1 2 3 4 5 6



5 2 6 1 4 3

を完成せよ。