テーマ：転置行列、対称行列、交代行列、対角行列、三角行列、トレース

【転置行列】 (m,n) 行列 $A=(a_{ij})$ に対し、a_{ij} を (j,i) 成分に持つ (n,m) 行列を A の**転置行列** と言い、${}^tA$ と表す。例えば

$$ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} $$

【10〜12 (命題)】 k をスカラー、A, B をサイズの等しい行列とするとき、次を示せ。

【10】 ${}^t(A+B) = ({}^tA) + ({}^tB)$　　**【11】** ${}^t(kA) = k\,({}^tA)$　　**【12】** ${}^t({}^tA) = A$

【定理】 A を (m,ℓ) 行列、B を (ℓ,n) 行列とするとき、

$$ {}^t(AB) = ({}^tB)\,({}^tA) $$

(順番が逆になることに注意。)

【定義】

- ${}^tA = A$ を満たす正方行列を **対称行列** と言う。
- ${}^tA = -A$ を満たす正方行列を **交代行列** と言う。
- n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ の対角線上の成分 $a_{11},\cdots,a_{nn}$ を A の**対角成分** と言う。
- 対角成分以外の成分が全て 0 であるような正方行列を **対角行列** と言う。
- 対角成分より下の成分が全て 0 であるような正方行列を **上三角行列** と言う。
- 対角成分より上の成分が全て 0 であるような正方行列を **下三角行列** と言う。

【13】 A を (m,n) 行列 とするとき、積 $A\,{}^tA$ 及び ${}^tAA$ が定義できて、$A\,{}^tA$ は m 次対称行列、${}^tAA$ は n 次対称行列になることを示せ。

【14】 A が対称行列ならば任意の自然数 m について A^m も対称行列であることを示せ。

【15】 A が交代行列のとき、どの様な自然数 m について A^m は交代行列になるか、また対称行列になるか？

【16】 A, B が共に n 次の対称行列のとき、その積 AB も対称行列になるか？

【17】 任意の正方行列 A に対して次を示せ。

(1) $A + {}^tA$ は対称行列、$A - {}^tA$ は交代行列である。

(2) A は或る対称行列と或る交代行列の和に書くことができる。

(3) A を対称行列と交代行列の和の形に書く方法はひととおりしかない。

【定理】$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$ を共に n 次の対角行列とすると、

$$(1) \quad AB = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix} \qquad (2) \quad A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad (\ k = 1, 2, \cdots\ )$$

【定理】A, B が共に n 次の上三角行列ならば、その和 $A + B$ も、その積 AB も上三角行列になる。(下三角行列でも同様。)

【18】 上三角行列 A が同時に交代行列でもあれば $A = O$ であることを示せ。

【トレース】n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対しその n 個の対角成分の和を

$$\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

と書き、A のトレース **(trace)** と言う。

【19〜21 (命題)】 n 次正方行列 A, B とスカラー k に対して次を示せ。

【19】 $\mathrm{tr}\,(kA) = k\,\mathrm{tr}\,(A)$

【20】 $\mathrm{tr}\,(A + B) = \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B)$

【21】 $\mathrm{tr}\,({}^tA) = \mathrm{tr}\,(A)$

【22】 $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(A) \times \mathrm{tr}\,(B)$ は正しいか？

【23 (命題)】 (m, n) 行列 A と (n, m) 行列 B に対して $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$ を示せ。

【24】 2 次行列 A, B, C で $\mathrm{tr}\,(ABC) \neq \mathrm{tr}\,(CBA)$ なる例を作れ。

【25】 $AB - BA = E_n$ となる 実 n 次行列 A, B は存在しないことを示せ。

【26】 $AB + BA = O$, $AB \neq O$, $BA \neq O$ となる 2 次行列 A, B の例を作れ。

【27】 複素 2 次行列 (複素数を成分に持つ 2 次行列) A で、$\mathrm{tr}\,({}^tAA) = 0$ であるが $A \neq O$ である様な例を作れ。

【28】 2 次行列 A, B, C を、$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C := AB$ とおく。このとき、A^3, B^2, C^7 を計算せよ。