# 応用線形代数演習 I ( 塩田教官 ) **No.1**

テーマ：行列と数ベクトルの基本的定義

【定義】

- 数を縦または横に並べて書いてカッコで括ったものを **数ベクトル** と呼ぶ。
- $n$ 個の数を縦に並べた数ベクトルを $n$ **項列ベクトル**、縦に並べた数ベクトルを $n$ **項行ベクトル** と言う。
- 数を縦横に長方形に並べて書いてカッコで括ったものを **行列** と呼ぶ。
- 行列の横の並びを **行**、縦の並びを **列** と言う。
- 覚え方は「行に $=$ あり、列に $\|$ あり」。
- $m$ 個の行と $n$ 個の列を持つ行列を $(m,n)$ **行列** または $m \times n$ **行列** と言う。
- 数ベクトルも行列の一種である。すなわち、$(1,n)$ 行列 $= n$ 項行ベクトル、$(m,1)$ 行列 $= m$ 項列ベクトル、である。
- 行列の上から $i$ 番目の行を **第 $i$ 行ベクトル**、左から $j$ 番目の列を **第 $j$ 列ベクトル**と言う。
- 行列の上から $i$ 番目の行の、左から $j$ 番目の列の数を $(i,j)$ **成分** と言う。
- $(i,j)$ 成分が $a_{ij}$ であるような行列 $A$ を $A = (a_{ij})$ と書く。
- $(n,n)$ 行列を特に $n$ **次行列** または $n$ **次正方行列** と言う。
- ベクトルや行列と区別するために、数のことを **スカラー** と呼ぶ。
- 行列 $A = (a_{ij})$ のスカラー $c$ によるスカラー倍は、$cA = (ca_{ij})$ と定義される。
- 行列の和・差はサイズが等しい行列についてのみ定義され、対応する成分ごとの和・差を取る。すなわち、$(a_{ij}) \pm (b_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij})$.
- 行列の積はサイズの組み合わせが

$$(\ell, m) \text{ 行列} \times (m,n) \text{ 行列} = (\ell, n) \text{ 行列}$$

の時のみ定義される。( 内側の $m$ がポイント ) $A = (a_{ik})$ が $(\ell, m)$ 行列、$B = (b_{kj})$ が $(m,n)$ 行列のとき、その積 $C = (c_{ij}) = AB$ の成分は

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{im} b_{mj}$$

で定められる。すなわち、

$$AB \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = A \text{ の第 } i \text{ 行ベクトルと } B \text{ の第 } j \text{ 列ベクトルの積}$$

◇ 一般には $AB = BA$ は成り立たない。

◇ (積がこの順で定義できるとき、) 結合律 $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ。

- 正方行列 $A$ のべき乗を $A^2 = AA$, $A^3 = AA^2$, $\cdots$ と定める。
- サイズ $(m,n)$ の零行列を $O = O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$、$O_n := O_{n,n}$、$n$ 次の単位行列を $E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ と表す。( 単位行列を $I_n$, $1_n$ と書く人もいる。)

◇ 任意の行列 $A$ について、

$$A+O=O+A=A,\quad AO=O,\quad OA=O,\quad AE=EA=A$$

が成り立つ。

（ただし $O$, $E$ は $A$ との和や積が定義できるサイズの零行列・単位行列）

**【1】** (1) $xy$-平面内のふたつのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ のなす角を $\theta$ とするとき、$\cos\theta$ を $a,b,c,d$ で表せ。

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ の作る平行四辺形の面積は $|\,ad-bc\,|$ であることを示せ。

**【2】** 2 次行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ と自然数 $n$ について $A^n$ を $n$ の式で表せ。

**【3】** 2 つの行列 $A,B$ について積 $AB$ と $BA$ が共に定義できていて、しかも $AB=BA$ であるという。このとき $A,B$ はサイズの等しい正方行列であることを示せ。

**【4】** 2 次行列 $A$, $B$ について $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ は成り立つか？

**【5】** (1) $A\neq O$ だが $A^2=O$ となるような 2 次行列 $A$ の例を挙げよ。

(2) $A\neq O,E$ だが $A^2=A$ となるような 2 次行列 $A$ の例を挙げよ。

**【6】** $A$ も $B$ も逆行列を持つが $A+B$ も $A-B$ も逆行列を持たないような 2 次行列 $A,B$ の例を挙げよ。

**【7】** 次の条件 (a)〜(c) を満たす 2 次行列 $A$ をすべて求めよ:

(a) $A$ の成分は全て負でない整数。　　(b) $A$ は逆行列をもつ。

(c) $A^{-1}$ の成分も全て負でない整数。

**【8】** (1) 2 次行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ と 自然数 $n$ について $A^n$ の各成分を 5 で割った余りを調べよ。

(2) $B=\dfrac{1}{5}A=\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ とおくとき、任意の自然数 $n$ に対して $B^n\neq E$ であることを示せ。

(3) $\cos\theta=\frac{4}{5}$、$\sin\theta=\frac{3}{5}$ を満たす実数 $\theta$ は円周率 $\pi$ の有理数倍ではないことを示せ。

**【9】** $n$ 次行列 $A=(a_{ij})$ は条件

「任意の $n$ 次行列 $B$ に対して $AB=BA$ となる」

を満たすという。このとき $A$ は単位行列 $E_n$ の適当なスカラー倍であることを示せ。