

学生番号

氏名

【例題】次に挙げるユークリッド空間 \mathbf{R}^3 のベクトルの組に対してグラム-シュミットの直交化法を実行せよ。

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

【略解】 $k=1$ のとき、

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{3}, \quad \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$k=2$ のとき、

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2, \mathbf{a}_1) \mathbf{a}_1 = \mathbf{u}_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{a}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\|\mathbf{v}\| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{3}{\sqrt{6}} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$k=3$ のとき、

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3, \mathbf{a}_1) \mathbf{a}_1 - (\mathbf{u}_3, \mathbf{a}_2) \mathbf{a}_2 = \mathbf{u}_3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{a}_1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \mathbf{a}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{a}_3 = \sqrt{2} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

【問題】次に挙げるユークリッド空間 \mathbf{R}^4 のベクトルの組に対してグラム-シュミットの直交化法を実行せよ。

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$