応用線形代数演習 II（塩田教官）　　1998 年 10 月 2 日のレポート

学生番号　　　　　　　　氏名

【例題 1】 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ の基底 Λ を

$$\Lambda = \left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

と取るとき、ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ の、基底 Λ に関する成分 ${}^t(x_1, x_2, x_3)$ を求めよ。

【略解】 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を解けば良い。

$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{7}{2}$ がすぐわかるので、${}^t(x_1, x_2, x_3) = {}^t\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

【問題 1】 あなたの学生番号の下一桁の数字を a とする。3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ の基底 Λ を

$$\Lambda = \left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

と取るとき、ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ の、基底 Λ に関する成分を求めよ。

【例題 2】2 次以下の実数係数の x の多項式の成すベクトル空間を $V = \mathbf{R}_2[x]$ と表す。V の基底 Λ を

$$\Lambda = \{ \boldsymbol{a}_1 = 1,\, \boldsymbol{a}_2 = x+1,\, \boldsymbol{a}_3 = (x+1)^2 \}$$

と取るとき、ベクトル $(x+2)^2$ の Λ に関する成分 ${}^t(c_1, c_2, c_3)$ を求めよ。

【略解】$(x+2)^2 = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = c_1 + c_2(x+1) + c_3(x+1)^2$ を解けば良い。先ず $x=-1$ を入れて $c_1 = 1.$　両辺を微分して $2(x+2) = c_2 + 2c_3(x+1).$　これに再び $x=-1$ を入れて $c_2 = 2.$ $c_3 = 1$ は 2 次の係数を見れば明らか。

【問題 2】ベクトル空間 $V = \mathbf{R}_2[x]$ とその基底 Λ は 【例題 2】 のとおりとする。V のもうひとつの基底 Λ' を

$$\Lambda' = \{ \boldsymbol{a}'_1 = 1,\, \boldsymbol{a}'_2 = x+2,\, \boldsymbol{a}'_3 = (x+2)^2 \}$$

とするとき、Λ から Λ' への基底変換の行列 $Q = (q_{ij})$、すなわち

$$\boldsymbol{a}'_j = q_{1j}\boldsymbol{a}_1 + q_{2j}\boldsymbol{a}_2 + q_{3j}\boldsymbol{a}_3 \qquad (\ j = 1, 2, 3\ )$$

を満たす 3 次行列を求めよ。

(ヒント：$1,\, x+2,\, (x+2)^2$ の Λ に関する成分を計算して行と列に注意して並べよ。)