

学生番号

氏名

【例題 1】 実係数多項式のなす実ベクトル空間 $\mathbf{R}[x]$ において、ベクトルの組

$$x+1, \quad x-1, \quad x^2-1$$

は一次独立であることを示せ。

【略解】 『 恒等式 $c_1(x+1) + c_2(x-1) + c_3(x^2-1) = 0$ が成り立つとき、 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ である 』 ことを示せば良い。

$$c_1(x+1) + c_2(x-1) + c_3(x^2-1) = 0$$

に $x=1$ を代入すると $c_1 \times 2 = 0$. 従って

$$c_1 = 0 \quad \text{かつ} \quad c_2(x-1) + c_3(x^2-1) = 0.$$

更に $x=-1$ を代入すると $c_2 \times (-2) = 0$. 従って

$$c_2 = 0 \quad \text{かつ} \quad c_3(x^2-1) = 0.$$

故に $c_3 = 0$.

□

【問題 1】 実係数多項式のなす実ベクトル空間 $\mathbf{R}[x]$ において、ベクトルの組

$$x^2, \quad (x-1)^2, \quad (x-2)^2$$

は一次独立であることを示せ。

【例題 2】 実数係数の多項式の成す実ベクトル空間 $\mathbf{R}[x]$ において、部分集合

$$W := \{ f(x) \in \mathbf{R}[x] \mid f(1) = 0 \}$$

は部分空間であることを示せ。

【略解】 『 $f(x), g(x) \in W, k, \ell \in \mathbf{R}$ とするとき、 $kf + \ell g \in W$ である』ことを示せば良い。 $f(x), g(x) \in W$ ならば $f(1) = g(1) = 0$ であるから、

$$(kf + \ell g)(1) = kf(1) + \ell g(1) = k \cdot 0 + \ell \cdot 0 = 0.$$

従って $kf + \ell g \in W$.

□

【問題 2】 実数係数の多項式の成す実ベクトル空間 $\mathbf{R}[x]$ において、部分集合

$$W := \left\{ f(x) \in \mathbf{R}[x] \mid \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}$$

は部分空間であることを示せ。

【問題 3】 次に挙げる実ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ の部分集合 W はいずれも $\mathbf{R}^2$ の部分空間にならない。その理由を述べよ。

$$(1) W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid xy \geq 0 \right\}$$

$$(2) W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \text{ は共に有理数} \right\}$$