

学生番号

氏名

【問題 1】3 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ に掃き出し法を適用して正則かどうか判定し、正則な場合はその逆行列も求めよ。

【例題】連立一次方程式 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$ を掃き出し法を用いて解け。

【略解】拡大係数行列の行変形を行うと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

なので解があり、解の自由度は 未知数の個数 - 階数 = $3 - 2 = 1$ 。残った 2 つの式 $x_1 + x_3 = 2$, $x_2 - 2x_3 = 3$ から一般解は

$$x_1 = -t + 2, \quad x_2 = 2t + 3, \quad x_3 = t \quad (t \text{ はパラメータ})$$

となる。この解はベクトルを用いて次のように書くこともできる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ}).$$

【問題 2】掃き出し法を用いて次の連立一次方程式に解が存在するか否かを判定し、解を持つときはその一般形を求めよ。

$$(1) \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 3x - 5y + 2z = -3 \\ x + y + z = 2 \\ 4x - 4y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x + y + z + w = 5 \\ x + 2y + 3z + 4w = 11 \\ x - 2y + z - 2w = 5 \end{cases}$$