

学生番号 \_\_\_\_\_ 情 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

【問題 1】 次の行列のうち対角行列、上 (下) 三角行列、対称行列、交代行列であるものをそれぞれ述べよ。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角行列 :

上三角行列 :

下三角行列 :

対称行列 :

交代行列 :

【例題 1】 交代行列の対角成分は全て 0 であることを示せ。

【解】  $n$  次正方行列  $A = (a_{ij})$  が交代行列であるとする。  ${}^tA = -A$  ゆえ

$A$  の  $(i, i)$  成分 =  ${}^tA$  の  $(i, i)$  成分 =  $(-A)$  の  $(i, i)$  成分.

従って  $a_{ii} = -a_{ii}$  となり  $a_{ii} = 0$  を得る。

【問題 2】 対称行列  $A$  が同時に交代行列でもあれば  $A = O$  であることを示せ。

【例題 2】  $A = (a_{ij})$  を  $(m, n)$  行列とすると、 $m$  次行列  $A^t A$  の  $(i, i)$  成分を  $a_{ij}$  を用いて表せ。

【解】

$$\begin{aligned} A^t A \text{ の } (i, i) \text{ 成分} &= \sum_{k=1}^n A \text{ の } (i, k) \text{ 成分} \times {}^t A \text{ の } (k, i) \text{ 成分} \\ &= \sum_{k=1}^n A \text{ の } (i, k) \text{ 成分} \times A \text{ の } (i, k) \text{ 成分} \\ &= \sum_{k=1}^n (a_{ik})^2. \end{aligned}$$

【問題 3】  $A = (a_{ij})$  を実  $(m, n)$  行列とする。

(1)  $\text{tr}(A^t A)$  を  $a_{ij}$  を用いて表せ。

(2)  $\text{tr}(A^t A) = 0$  ならば  $A = O$  であることを示せ。