応用線形代数演習 II（塩田教官） No.26

テーマ：二次形式、ジョルダンの標準形、複素計量ベクトル空間

【二次形式】 • $ax^2+bxy+cy^2$ の形の式を 2 変数の二次形式という。

• $ax^2+bxy+cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と書けることに注意しよう。

• 実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

は回転の行列 P を用いて対角化することができた（12 月 4 日）:

$$^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

そこで、変換式

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって座標軸を回転させると、新しい座標では

$$ax^2+bxy+cy^2 = \lambda X^2 + \mu Y^2$$

となる。

• たとえば、方程式 $ax^2+bxy+cy^2=1$ で表される図形は

(1) $\lambda > 0,\ \mu > 0$ のときは楕円、 (2) $\lambda\mu < 0$ のときは双曲線

であることがわかる。

• 3 変数以上の二次形式についても同様の考察ができる。たとえば方程式 $ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz=1$ で定義される図形は、実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix}$$

の固有値を α, β, γ とするとき、

(1) α, β, γ が全て正ならば楕円面

(2) $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma < 0$ ならば一葉双曲面

(3) $\alpha > 0,\ \beta < 0,\ \gamma < 0$ ならば二葉双曲面

である。

【ジョルダンの標準形】 • 対角線に同じ数 λ, そのひとつ上に 1 が並んだ（m 次）正方行列

$$B(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{（他の成分は 0）}$$

をジョルダン・ブロックと言う。

◇ 任意の正方行列 A は、適当な正則行列 P を用いて、ジョルダン・ブロックを対角線に並べた行列に変換することができる：

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix}$$

（ $B_1 = B(\lambda_1, m_1), \cdots, B_r = B(\lambda_r, m_r)$ はジョルダン・ブロック ）

◇ $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ は同じ数が入っていてもよい。

- この右辺の形を A の **ジョルダンの標準形** と呼ぶ。

◇ 標準形はジョルダン・ブロックの並べ方を除いて一意的に定まる。

【複素数の記号】 複素数 $\alpha = x + iy$ (x, y は実数) に対し、

- $\mathrm{Re}(\alpha) := x$ を α **の実部**、$\mathrm{Im}(\alpha) := y$ を α **の虚部** と言う。
- $\bar{\alpha} := x - iy$ を α **の共役** (きょうやく) **複素数** と言う。
- 非負の実数 $|\,\alpha\,| := \sqrt{x^2 + y^2}$ を α **の絶対値** と言う。
- 指数関数を $e^{\alpha} := e^{x}(\cos y + i \sin y)$ で定める。

【命題】 複素数 α, β について次が成り立つ。

(1) $\overline{(\bar{\alpha})} = \alpha$　　(2) $\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$　　(3) $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$　　(4) $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = \dfrac{(\bar{\alpha})}{(\bar{\beta})}$

(5) $\alpha = \bar{\alpha} \iff \alpha$ は実数

(6) $|\,\bar{\alpha}\,| = |\,\alpha\,|$　　(7) $|\,\alpha\,|^2 = \alpha\bar{\alpha}$　　(8) $|\,\alpha\beta\,| = |\,\alpha\,|\,|\,\beta\,|$

(9) $|\,\alpha\,| = 0 \iff \alpha = 0$

(10) $e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}e^{\beta}$　　(10) $|\,e^{\alpha}\,| = e^{\mathrm{Re}(\alpha)}$

(11) $\alpha \neq 0 \implies$ 或る複素数 γ が存在して $\alpha = e^{\gamma}$

(13) $\alpha + \bar{\alpha} = 2\,\mathrm{Re}(\alpha) \leqq 2\,|\,\alpha\,|$

【標準内積の定義】 ● 複素数体上の n 次元数ベクトル空間 $\mathbf{C}^n$ の標準内積を次の式で定義する :

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \alpha_1\overline{\beta_1} + \cdots + \alpha_n\overline{\beta_n} \qquad \left(\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n\right).$$

◇ 標準内積は次の 4 つの性質を持っている。

1° $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}$

2° $(\gamma\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \gamma\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}),\quad (\boldsymbol{u}, \gamma\boldsymbol{v}) = \bar{\gamma}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \quad (\gamma \in \mathbf{C})$

3° $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v})$

4° $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ は実数で、$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geqq 0.$　更に $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$

【複素計量ベクトル空間】 ● 複素ベクトル空間 V の各 2 元 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して複素数 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ が定義されていて上の 4 条件を満たすとき、(,) を V **の内積**と言い、$(V, (\ ,\ ))$ を**複素計量ベクトル空間**と言う。
(簡単に V を複素計量ベクトル空間と言うこともある。)

- 複素計量ベクトル空間 V の元 $\boldsymbol{u}$ に対しても $||\,\boldsymbol{u}\,|| = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}$ によって $\boldsymbol{u}$ の長さ（ノルム）が定義される。
- $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ であるとき $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交すると言う。

◇ 複素計量ベクトル空間においても、実計量ベクトル空間と同様に

$$\begin{cases} |\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\,| \leqq ||\,\boldsymbol{u}\,|| \times ||\,\boldsymbol{v}\,|| & (\text{シュヴァルツの不等式}) \\ ||\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\,|| \leqq ||\,\boldsymbol{u}\,|| + ||\,\boldsymbol{v}\,|| & (\text{三角不等式}) \end{cases}$$

が成り立つ。

◇ また、直交系・正規直交系・正規直交基底が考えられ、シュミットの直交化法も No.18 のプリントと全く同じ式で使える。

◇ 正規直交基底を用いて計量ベクトル空間に座標を入れると、内積を標準内積の式で計算することができる。

【ユニタリ行列・エルミート行列・正規行列】 $A = (\alpha_{ij})$ を n 次複素行列とする。

- $\bar{A} := (\bar{\alpha}_{ij})$ (成分を全て複素共役で置き換えたもの) と定める。
- $A^* := {}^t\bar{A}$ と定める。
- $AA^* = E$ が成り立つとき A を**ユニタリ行列**と言う。
- $A^* = A$ が成り立つとき A を**エルミート行列**と言う。
- $A^*A = AA^*$ が成り立つとき A を**正規行列**と言う。
  (ユニタリ行列、エルミート行列は正規行列である。)

【定理】 正規行列はユニタリ行列によって対角化可能である。すなわち、

$$A: \text{正規行列} \Longrightarrow \exists P: \text{ユニタリ行列} \quad \text{s.t.} \quad P^{-1}AP = \text{対角行列} .$$

【命題】 次が成り立つ。ただし (,) は $\mathbf{C}^n$ の標準内積、$\gamma \in \mathbf{C}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{C}^n$, A, B は n 次複素行列とする。

(1) $(A+B)^* = A^* + B^*$　　(2) $(AB)^* = B^*A^*$　　(3) $(A^*)^* = A$

(4) $(\gamma A)^* = \bar{\gamma}\,(A^*)$　　(5) $\det(A^*) = \overline{(\det A)}$　　(6) $(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v})$

(7) A がユニタリ行列ならば $|\det A| = 1$ である。

(8) エルミート行列の固有値は全て実数である。

未解答問題

No.6 : 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73

No.7 : 82, 84

No.8 : 86, 87, 95, 96, 97

No.9 : 101, 102, 103, 107, 108, 109, 110, 111

No.10 : 112, 115, 117, 119, 120, 121

No.11 : 122, 123

No.12 : 133, 134, 135, 136, 137, 138

No.13 : 139, 140, 141

No.14 : 154, 155, 156

No.15 : 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168

No.16 : 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183

No.17 : 184, 185, 186, 187, 188, 189

No.18 : 197

No.19 : 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207

No.20 : 212, 213, 214, 216, 217, 218, 219, 220, 221

No.21 : 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239

No.22 : 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 249, 250, 251, 252

No.23 : 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265

No.24 : 266, 267, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276

No.25 : 279, 280, 284, 285