# 応用線形代数演習 II ( 塩田教官 ) **No.25**

テーマ：3 次元ベクトルの外積

**【外積の定義】** $\mathbf{R}^3$ のふたつのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して、その **外積** が

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$$

によって定義される。( 外積は 3 次元ベクトルにしか定義されない。)
2 次の行列式を用いると

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b & y \\ c & z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c & z \\ a & x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

と書くこともできる。また以下で

$$(\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \,) = ax + by + cz$$

は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の **標準内積** を、

$$\| \, \boldsymbol{a} \, \| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

は $\boldsymbol{a}$ の **長さ** を表す。

**【例】** $\mathbf{R}^3$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ については

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2$$

**【定理 A】** 外積について次の (a)〜(c) が成り立つ：

(a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ とも $\boldsymbol{b}$ とも直交する。

(b) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は右手系を成す。(ただし $xyz$ 軸も右手系として取っておく。)

(c) $\| \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \| = (\ \boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 ).

**【定理 B】** 逆に $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^3$ が与えられたとき、次の (a)〜(c) を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積に限る
:

(a) $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}$ とも $\boldsymbol{b}$ とも直交する。

(b) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$ は右手系を成す。

(c) $\| \, \boldsymbol{x} \, \| = (\ \boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 ).

【定理 C】$\mathbf{R}^3$ の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ に対して

$$|\,\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\,| = \begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = \pm(\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{の作る平行 6 面体の体積})$$

が成り立つ。ただし符号は、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が右手系を成すときは $+$、左手系を成すときは $-$ になる。

**【277】** $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ なる例を作れ。

**【278〜283】** 外積に関する次の命題を示せ。

**【278】** (1) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

(2) 実数 $k$ に対し $(k\,\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times(k\,\boldsymbol{b}) = k\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

**【279】** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$

**【280】** $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = |\,\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\,|\,\boldsymbol{b}$

**【281】** $(\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,,\boldsymbol{c}\,) = (\,\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\,,\boldsymbol{a}\,) = (\,\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}\,)$

**【282】（ラグランジュの公式）** $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\,)\,\boldsymbol{b} - (\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\,)\,\boldsymbol{c}$

**【283】（ヤコビの恒等式）** $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$

**【284】** $\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^3$ に対して次は同値であることを示せ。

(1) $\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c}$ は一次独立である。

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\,\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ は一次独立である。

**【285$^*$】** 6 人の人間が居るとする。このとき、次のどちらかが成り立つことを示せ。

(a) この中に、互いに面識のある 3 人組が居る。

(b) この中に、互いに全く面識のない 3 人組が居る。