応用線形代数演習 II（塩田教官） No.23

テーマ：実対称行列の対角化、三角化、ケーリー・ハミルトンの定理、Frame 法

【定理】 実対称行列 A は直交行列によって対角化可能である。

【アルゴリズム】 (1) A の固有値を計算する。

(2) 各固有値 λ について固有空間 $V(\lambda)$ の基底を求める。

(3) (2) の基底にグラム-シュミットの直交化法を適用して $V(\lambda)$ の正規直交基底を求める。

(4) 全ての固有値 λ に対して (3) のようにして求めた基底ベクトルを全て並べて $P = (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)$ と置けば、P が A を対角化する直交行列である。

【253〜257】 次の実対称行列を直交行列によって対角化せよ。

【253】 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **【254】** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

【255】 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **【256】** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

【257】 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

【定理（三角化）】 (1) 任意の n 次複素行列 A に対して、$P^{-1}AP$ が上三角行列となる様な n 次複素正則行列 P が存在する。

(2) 一般に任意の体 $\mathbf{K}$ を係数にもつ n 次行列 A に対しても、$P^{-1}AP$ が上三角行列となる様な $\overline{\mathbf{K}}$ 係数 n 次正則行列 P が存在する。（$\overline{\mathbf{K}}$ は $\mathbf{K}$ の代数閉包。）

【その他の標準形】 **ジョルダンの標準形** などについては教科書の **補足** を見よ。

三角化の定理を用いると、次の **ケーリー・ハミルトンの定理** や **Frame 法** が導かれる。

【ケーリー・ハミルトンの定理】 n 次行列 A の固有多項式を $\Phi_A(t)$ と置くと

$$\Phi_A(A) = O$$

が成り立つ。

【258】 正方行列 A が正則ならば、A^{-1} は A の多項式として

$$A^{-1} = c_{n-1}A^{n-1} + c_{n-2}A^{n-2} + \cdots + c_1 A + c_0 E$$

と表すことができることを示せ。

【Frame 法】 n 次行列 A の固有多項式 $\Phi_A(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_n$ は次のアルゴリズムによって求まる：

var X : n 次行列;　k : integer;

begin

　$X := E$;

　for $k := 1$ **to** n **do**

　　begin　$X := AX$;　$c_k := -\mathrm{tr}\,(X)/k$;　$X := X + c_k E$　**end**

end;

【259〜260】 次の 3 次行列の固有多項式を Frame 法を用いて求めよ。

【259】 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$　　**【260】** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

【261】 3 次行列について、三角化の定理を用いて Frame 法を証明せよ。

【定理】 $AB = BA$ を満たすふたつの実対称行列 A, B は同じ直交行列によって対角化可能である。

【262】 ふたつの 4 次実対称行列

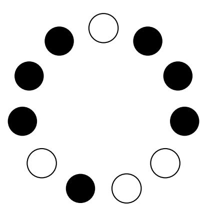
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を同時にに対角化する正則行列をひとつ求めよ。

【263】 ふたつの n 次行列 A, B が $AB = BA$ を満たすとする。このとき、λ を A の固有値、$V_A(\lambda)$ を固有値 λ に対する A の固有空間、$\boldsymbol{v} \in V_A(\lambda)$ とするとき、$B\boldsymbol{v} \in V_A(\lambda)$ であることを示せ。

【264〜265】 図の様にオセロの駒 (表は白、裏は黒) が円形に 11 個並べてある。「隣接する 3 個を同時に裏返す」という操作を何回行えば全て白にすることができるか、その最少手を求めよ。

【264】



【265】