応用線形代数演習 II（塩田教官）　No.22

テーマ：固有多項式の性質、対角化可能性

【定理】$m+n$ 次行列 A が
$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ O & S \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad A = \begin{pmatrix} P & O \\ R & S \end{pmatrix}$$
（P は m 次行列, S は n 次行列）の形であれば、
$$\Phi_A(t) = \Phi_P(t)\,\Phi_S(t)$$
が成り立つ。

【定理】正方行列 A に対して $B = {}^tA$ とすると、$\Phi_B(t) = \Phi_A(t)$ が成り立つ。従って A と ${}^tA$ の固有値は一致する。

【240】正方行列 A の固有ベクトルは ${}^tA$ の固有ベクトルでもあるか？

【命題】A を n 次行列、P を n 次正則行列とし $B = P^{-1}AP$ とおくとき、次が成り立つ。

(1) $\Phi_A(t) = \Phi_B(t)$.

(2) A の固有値と B の固有値は一致する。

(3) $\det(A) = \det(B), \quad \mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(B).$

【241】A を n 次行列、P を n 次正則行列とし $B = P^{-1}AP$ とおく。$\boldsymbol{v}$ が固有値 λ に対する A の固有ベクトルならば、$P^{-1}\boldsymbol{v}$ は固有値 λ に対する B の固有ベクトルであることを示せ。

【対角化可能性】A を n 次行列とする。或る n 次正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列となる
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
とき A **は対角化可能である**、A **は** P **によって対角化される** などと言う。

【242】任意のスカラー a に対して、2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ は対角化可能ではないことを示せ。

【243】2 次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ が対角化不可能となるような a の値を全て求めよ。

【244〜246】次の様な 2 次行列 A（または A と B）の例を挙げよ。

【244】A は対角化可能ではないが A^2 は対角化可能である。

【245】A も B も対角化可能だが $A+B$ は対角化可能でない。

【246】A も B も対角化可能だが AB は対角化可能でない。

【固有空間】n 次行列 A の 固有値 λ に対して

$$V(\lambda) := \{\, \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \text{ は } A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \text{ を満たす } n \text{ 項列ベクトル} \,\}$$

を **固有値 λ に対する A の固有空間** と言う。

正確には、A の成分と λ を含む体を $\mathbf{K}$ として、$V(\lambda)$ は $\mathbf{K}^n$ の部分集合と考える。すると、$V(\lambda)$ は $\mathbf{K}^n$ の部分空間になる。

【固有値の重複度】n 次行列 A の 固有値 λ に対して、固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ における解 λ の重複度を **固有値 λ の重複度** と言う。

【命題】正方行列 A の固有値 λ に対して

$$\dim V(\lambda) \leqq \lambda \text{ の重複度}$$

が成り立つ。

【定理】正方行列 A が対角化可能であることと、A の任意の固有値 λ に対して

$$\dim V(\lambda) = \lambda \text{ の重複度}$$

が成り立つことは同値である。

【定理】正方行列 A の固有値が全て異なれば A は対角化可能である。

【**247〜252**】次の正方行列の全ての固有値について固有空間の次元を調べよ。

【**247**】 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 【**248**】 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【**249**】 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 【**250**】 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【**251**】 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 【**252**】 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$