応用線形代数演習 II (塩田教官) **No.21**

テーマ：固有値・固有ベクトルの定義と計算法

【固有値・固有ベクトルの定義】 A を n 次正方行列とする。

- スカラー λ と n 項ベクトル $\boldsymbol{v}$ が

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$$

を満たすとき、λ を A **の固有値**、$\boldsymbol{v}$ を **固有値 λ に対する A の固有ベクトル** と言う。

【固有多項式】 • n 次正方行列 A に対し、文字 t の n 次多項式

$$\Phi_A(t) := \det(tE - A)$$

を A **の固有多項式** と言う。また方程式

$$\Phi_A(t) = 0$$

を A **の固有方程式** と言う。

◇ λ が A の固有値であることは $\Phi_A(\lambda) = 0$ であることと同値である。

【固有値・固有ベクトルの計算方法】

(1) $\Phi_A(t)$ を求める。

(2) $\Phi_A(t) = 0$ を解くことにより固有値 λ を求める。

(3) $(\lambda E - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の自明でない解として固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を求める。

【注】 (1) 「代数学の基本定理」により、実行列の固有値・固有ベクトルは複素数の範囲で求まる。

(2) 正方行列 A の任意の固有値 λ について、λ に対する A の固有ベクトルが少なくともひとつ存在する。

【定理 A】 n 次行列 A が n 個の一次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ を持つとき、$P := (\, \boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n \,)$ は正則行列であって、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (\, \lambda_j \text{ は } \boldsymbol{v}_j \text{ に対する固有値} \,)$$

が成り立つ。このとき A **は対角化可能である**、A **は** P **によって対角化される** などと言い、A^k は次のように簡単に表される：

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

【222〜224】 次の実数係数の行列の固有値・固有ベクトルを求めよ。(複素数を必要とするものもある。)

【222】 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **【223】** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **【224】** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

【**225〜227**】次の 4 次行列の固有多項式を求めよ。

【**225**】 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 　【**226**】 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -d & -c & -b & -a \end{pmatrix}$ 　【**227**】 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

【**定理 B**】A を n 次行列とする。

(1) $\Phi_A(t) = t^n - \mathrm{tr}\,(A)\, t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$　が成り立つ。

(2) A の n 個の固有値 (すなわち $\Phi_A(t)$ の n 個の根) を重複度を込めて $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とするとき、次が成り立つ。

$$\text{(i)}\quad \mathrm{tr}\,(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \qquad\qquad \text{(ii)}\quad \det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

【**定理 C**】上三角行列や下三角行列、対角行列の固有値は対角成分と一致する。

【**228〜231**】正方行列 A について次を示せ。

【**228**】 $\det(A) = 0 \iff$ 「 0 は A の固有値」

【**229**】「A が正則」$\iff$ 「A の任意の固有値 $\neq 0$」

【**230**】λ が A の固有値ならば λ^2 は A^2 の固有値である。

【**231**】「或る自然数 k について $A^k = O$」$\Longrightarrow$ 「A の任意の固有値 $= 0$」

【**232〜239**】A を正方行列とする。次の命題が正しければ証明し、正しくなければ反例を挙げよ。

【**232**】A の成分が全て正の実数ならば A の固有値も全て正である。

【**233**】A の成分が全て整数ならば A の固有値も全て整数である。

【**234**】A の対角成分が全て 0 ならば、A の任意の固有値 λ に対して $-\lambda$ も A の固有値である。

【**235**】A の固有ベクトルは A^2 の固有ベクトルでもある。

【**236**】A^2 の固有ベクトルは A の固有ベクトルでもある。

【**237**】$A^2 = E$ が成り立てば A の固有値は 1 または -1 である。

【**238**】$A^2 = A$ が成り立てば A の固有値は 1 または 0 である。

【**239**】A の任意の固有値が 0 または 1 であれば $A^2 = A$ が成り立つ。