応用線形代数演習 II（塩田教官） **No.20**

テーマ：計量ベクトル空間

【計量ベクトル空間】 ● 実ベクトル空間 V の各 2 元 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ に対して実数 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ が定義されていて次の 4 条件を満たすとき、$(\ ,\ )$ を V の**内積**と言い、$(V,(\ ,\ ))$、または単に V を **計量ベクトル空間**（実計量ベクトル空間）と言う。

1° $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$

2° $(k\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = k\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \qquad (k \in \mathbf{R})$

3° $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v})$

4° $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \geqq 0$ （等号は $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$ のときのみ成立）

- $\mathbf{R}^n$ に標準内積を考えた計量ベクトル空間を特に**ユークリッド空間**と言う。

◇ 計量ベクトル空間でも、ユークリッド空間と同様にノルム・角度・直交系・正規直交系・正規直交基底が考えられ、シュミットの直交化法も No.18 のプリントと全く同じ式で使える：

- $\boldsymbol{u} \in V$ に対し $||\,\boldsymbol{u}\,|| = \sqrt{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}$ を $\boldsymbol{u}$ **の長さ**、または $\boldsymbol{u}$ **のノルム** と言う。
- $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V$（$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$）に対し $\cos\theta = \dfrac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{||\,\boldsymbol{u}\,||\cdot||\,\boldsymbol{v}\,||}$ で決まる角度 θ を $\boldsymbol{u}$ **と** $\boldsymbol{v}$ **のなす角** と言う。（シュヴァルツの不等式（後述）により右辺は絶対値 1 以下の実数になる。）
- $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0$ のとき $\boldsymbol{u}$ **と** $\boldsymbol{v}$ **は直交する** と言う。

◇ V の一次独立なベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m\}$ が与えられたとき、次のアルゴリズムで正規直交系 $\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}$ を得る:

for $k := 1$ **to** m **do**

begin $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{u}_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} (\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{a}_j)\,\boldsymbol{a}_j$; $\quad \boldsymbol{a}_k := \dfrac{1}{||\,\boldsymbol{v}\,||}\,\boldsymbol{v}$ **end**;

特に $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ が V の基底ならば $\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$ は V の正規直交基底になる。

【定理 A】 $(V,(\ ,\ ))$ を実計量ベクトル空間、$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V$, $k,\ell \in \mathbf{R}$ とするとき次が成り立つ。

(1) $||\,k\,\boldsymbol{u}+\ell\,\boldsymbol{v}\,||^2 = k^2\,||\,\boldsymbol{u}\,||^2 + 2k\ell\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \ell^2\,||\,\boldsymbol{v}\,||^2$

(2) $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \dfrac{1}{2}\{\,||\,\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\,||^2 - ||\,\boldsymbol{u}\,||^2 - ||\,\boldsymbol{v}\,||^2\}$

(3) $|\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,| \leqq ||\,\boldsymbol{u}\,||\cdot||\,\boldsymbol{v}\,||$ （**シュヴァルツの不等式**）

(4) $||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|| \leqq ||\,\boldsymbol{u}\,|| + ||\,\boldsymbol{v}\,||$ （**三角不等式**）

【定理 B】 $(V,(\ ,\ ))$ を n 次元の実計量ベクトル空間、$\Lambda = \{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$ を V の正規直交基底とする。このとき $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ の Λ に関する成分を ${}^t(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, ${}^t(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ とすれば、

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$
$$||\,\boldsymbol{x}\,|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

が成り立つ。

【208〜210】 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を次の式で定義すると内積の条件を満たしていることを確かめよ。

【208】$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := ac + 2bd$

【209】$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := 2ac + ad + bc + 2bd$

【210】$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := 3ac - ad - bc + 2bd$

【211〜214】$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を次の式で定義しても $\mathbf{R}^2$ の内積とはならない。その理由を述べよ。

【211】$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := ac - bd$

【212】$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

【213】$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := ac + 2ad + 3bc + 4bd$

【214】$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := ac + ad + bc + bd$

【215〜216】実数係数の 2 次以下の x の多項式のなす実ベクトル空間 $V = \mathbf{R}_2[x]$ の 2 元 $f, g \in V$ に対して (f, g) を次の式で定義すると内積の条件を満たしていることを確かめよ。

【215】$(f, g) := \displaystyle\int_0^1 f(x)\, g(x)\, x^2\, dx$

【216】$(f, g) := f(0)\, g(0) + f(1)\, g(1) + f(2)\, g(2)$

【217〜218】$V = \mathbf{R}_2[x]$ の 2 元 $f, g \in V$ に対して (f, g) を次の式で定義しても V の内積とはならない。その理由を述べよ。

【217】$(f, g) := \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\, g(-x)\, dx$

【218】$(f, g) := f(0)\, g(0) + f(1)\, g(1)$

【219】実数係数 n 次正方行列全体の集合 $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ において　$(A, B) := \mathrm{tr}\,({}^t\!AB)$　は内積の条件を満たすことを確かめよ。

【220〜221】$V = \mathbf{R}_2[x]$ の 2 元 $f, g \in V$ に対して $(f, g) := \displaystyle\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ によって内積を定義するとき、次で与えられる V の基底 Λ に対してグラム-シュミットの直交化法を実行せよ。

【220】$\Lambda = \{ 1,\, x,\, x^2 \}$

【221】$\Lambda = \{ x^2,\, x,\, 1 \}$

【注意】レポート問題 2, 3 の様に、連続関数に対しては積分を用いて内積 (,) を定義することができる。すると

$$2\text{ 関数 } f(x),\, g(x) \text{ 間の距離} = \|\, f - g \,\|$$

と定めることができ、関数に対して**近い・遠い**といった議論を**定量的**に展開することができる。