応用線形代数演習 II (塩田教官) 　　No.18

テーマ：数ベクトルの標準内積、正規直交基底、グラム-シュミットの直交化法

【標準内積の定義】 実数体上の n 次元数ベクトル

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n$$

に対して、その **標準内積** は次式で定義される：

$$(\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\,):=u_1v_1+\cdots+u_nv_n\qquad(\;=\,{}^t\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\;)$$

【190】 標準内積は次の 4 つの性質を持つことを確かめよ。

(1) $(\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\,)=(\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\,)$

(2) $(\,k\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\,)=k\,(\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\,)$ 　(k : スカラー)

(3) $(\,\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}\,)=(\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\,)+(\,\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}\,)$

(4) $(\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\,)\geqq 0$ 　(等号成立 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{u}=\mathbf{0}$)

【ノルム・角度】 　• $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n$ に対し $||\,\boldsymbol{u}\,||=\sqrt{(\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\,)}$ を **$\boldsymbol{u}$ の長さ**、または **$\boldsymbol{u}$ のノルム** と言う。

◇ このときシュヴァルツの不等式 　$|\,(\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\,)\,|\leqq\,||\,\boldsymbol{u}\,||\,||\,\boldsymbol{v}\,||$ 　が成り立つ。

• $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^n$ ($\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$) に対し $\cos\theta=\dfrac{(\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\,)}{||\,\boldsymbol{u}\,||\cdot||\,\boldsymbol{v}\,||}$ で決まる角度 θ を **$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角** と言う。

• $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^n$ が $(\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\,)=0$ を満たすとき **$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交する** と言う。

【191〜192】 次のベクトルの組に対して、その成す角 θ の cos の値 $\cos\theta$ を求めよ。

【191】 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$ 　　**【192】** $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\9\\9\\7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\7\end{pmatrix}$

【193】 ベクトル 　$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\a\end{pmatrix}$ の成す角が $\dfrac{\pi}{3}=60^\circ$ となるように定数 a の値を定めよ。

【194】 ベクトル 　$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}3\\-5\\a\\4\end{pmatrix}$ の成す角が $\dfrac{\pi}{3}=60^\circ$ となるように定数 a の値を定めよ。

【195〜196】 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^n$ に対し次を示せ。

【195】 $||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||\leqq\,||\,\boldsymbol{u}\,||+||\,\boldsymbol{v}\,||$ 　(三角不等式)

【196】 $(\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\,)=\dfrac{1}{2}\left\{\,||\,\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\,||^2-||\,\boldsymbol{u}\,||^2-||\,\boldsymbol{v}\,||^2\right\}$

【定義】 $\mathbf{R}^n$ のベクトルの組 $\{\, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m \,\}$ は

- $\forall \boldsymbol{u}_j \neq \mathbf{0}$ かつ互いに直交するとき **直交系 (OS)**、
- 直交系であって更に $||\, \forall \boldsymbol{u}_j \,|| = 1$ であるとき **正規直交系 (ONS)**、
- 正規直交系であって更に $\mathbf{R}^n$ の基底であるとき **正規直交基底 (ONB)**

と言う。

【注】 平たく言うと、正規直交基底は一辺 1 の n 次元立方体を作る。従って、正規直交基底の方向に座標軸を作ると「良い座標軸」になる。

【グラム-シュミットの直交化法】 $\diamond$ $\mathbf{R}^n$ の一次独立なベクトルの組 $\{\, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m \,\}$ が与えられたとき、次のアルゴリズムで正規直交系 $\{\, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m \,\}$ が得られる：

var k : integer ; $\boldsymbol{v}$: vector ;

for $k := 1$ **to** m **do**

begin

$$\boldsymbol{v} := \boldsymbol{u}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{a}_j \,)\, \boldsymbol{a}_j \ ; \qquad \boldsymbol{a}_k := \frac{1}{||\, \boldsymbol{v} \,||}\, \boldsymbol{v}$$

end ;

$\diamond$ このとき

$$\boldsymbol{u}_1 /\!/ \boldsymbol{a}_1, \qquad \langle\, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k \,\rangle = \langle\, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k \,\rangle \quad (\ k = 1, 2, \cdots, m-1\ )$$

が成り立つ。

$\diamond$ 特に $\{\, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \,\}$ が $\mathbf{R}^n$ の基底ならば $\{\, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \,\}$ は $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底になる。

【197】 $\Lambda = \{\, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \,\}$ を $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底とし、$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ の Λ に関する成分をそれぞれ $(x_1, \cdots, x_n)$, $(y_1, \cdots, y_n)$ とする。すなわち、

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{a}_n, \qquad \boldsymbol{y} = y_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + y_n \boldsymbol{a}_n$$

このとき次を示せ。

(1) $x_j = (\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_j \,)$

(2) $(\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \,) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$

(3) $||\, \boldsymbol{x} \,||^2 = |\, x_1 \,|^2 + \cdots + |\, x_n \,|^2$

【注】 基底 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を用いて新しい座標軸を描くと $(x_1, \cdots, x_n)$, $(y_1, \cdots, y_n)$ はそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の新しい座標になる。このとき $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が正規直交基底であれば内積や長さが新しい座標でも同じ式で計算できる、ということを **【197】** は表している。