応用線形代数演習 II（塩田教官） No.14

テーマ：ベクトル空間の数値化

【基底に関する成分】 V を体 $\mathbf{K}$ 上の n 次元ベクトル空間、

$$\Lambda = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$$

を V の基底とする。このとき、任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

を満たすスカラーの組 ${}^t(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が唯ひとつ存在する。このスカラーの組を**ベクトル $\boldsymbol{x}$ の基底 Λ に関する成分**と呼ぶ。

【注】 この対応

$$V \ni \boldsymbol{x} \longmapsto {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{K}^n$$

によって V に $x_1x_2\cdots x_n$-座標系が導入されたことになる。

【定理 A】 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ の、基底 Λ に関する成分をそれぞれ

$${}^t(x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad {}^t(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

とするとき、

(1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ の基底 Λ に関する成分は ${}^t(x_1, x_2, \cdots, x_n) + {}^t(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ である。

(2) スカラー $k \in \mathbf{K}$ について、$k\,\boldsymbol{x}$ の基底 Λ に関する成分は $k\,{}^t(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ である。

【定理 B】 $\Lambda = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$, $\Lambda' = \{\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n\}$ を V の 2 つの基底とし、Q を Λ から Λ' への基底変換の n 次正則行列

$$(\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\,Q$$

とする。このとき $\boldsymbol{x} \in V$ の、2 つの基底 Λ, Λ' に関する成分をそれぞれ

$${}^t(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad {}^t(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$$

とすれば

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

【142〜144】 以下、3 次以下の実数係数の x の多項式の成すベクトル空間を $V = \mathbf{R}_3[x]$ と表す。V の基底 Λ を

$$\Lambda = \{\, x^3,\, x^2,\, x,\, 1 \,\}$$

と取るとき、次のベクトルの Λ に関する成分を求めよ。

【142】 x^3　　**【143】** $(x+1)^3$　　**【144】** $x(x-1)(x-2)$

【145〜147】 $V = \mathbf{R}_3[x]$ は前問のとおり。V の基底 Λ' を

$$\Lambda' = \{\, 1,\, x,\, x(x+1),\, x(x+1)(x+2) \,\}$$

と取るとき、次のベクトルの Λ' に関する成分を求めよ。

【145】 x^3　　**【146】** $(x+1)^3$　　**【147】** $x(x-1)(x-2)$

【148】 $V,\, \Lambda,\, \Lambda'$ を **【142】**〜**【147】** のとおりとするとき、Λ から Λ' への基底変換の行列を求めよ。

【149〜150】 実数成分の 2 次行列全体の集合

$$V = \mathrm{M}(2; \mathbf{R}) = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,\, b,\, c,\, d \in \mathbf{R} \right\}$$

は、行列としての和と実数倍によって実ベクトル空間となる。ここで

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\, Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\, R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\, S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置くと $\Lambda = \{\, P,\, Q,\, R,\, S \,\}$ は V の基底になる。このとき次のベクトルの Λ に関する成分を求めよ。

【149】 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$　　**【150】** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{pmatrix}$

【151〜152】 $V = \mathrm{M}(2; \mathbf{R})$ は前問のとおりとする。

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\, Q' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\, R' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\, S' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と置くと $\Lambda' = \{\, P',\, Q',\, R',\, S' \,\}$ も V の基底になる。このとき次のベクトルの Λ' に関する成分を求めよ。

【151】 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$　　**【152】** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{pmatrix}$

【153】 $V,\, \Lambda,\, \Lambda'$ を **【149】**〜**【152】** のとおりとするとき、Λ から Λ' への基底変換の行列を求めよ。

【154〜156】 線形漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad (\, n = 0, 1, 2, \cdots \,)$$

を満たす数列 $\boldsymbol{a} = \{\, a_n \,\}_{n=0,1,2,\cdots}$ 全体の集合 V を、数列の和とスカラー倍によってベクトル空間とみなす。V の基底 Λ を

$$\Lambda = \left\{ \boldsymbol{b} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n,\, \boldsymbol{c} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

と取るとき、次のベクトル $\boldsymbol{a} = \{\, a_n \,\}_{n=0,1,2,\cdots} \in V$ の Λ に関する成分を求めよ。

【154】 初期条件 $a_0 = 1,\, a_1 = 0$ を満たすもの。

【155】 初期条件 $a_0 = 0,\, a_1 = 1$ を満たすもの。

【156】 初期条件 $a_0 = a_1 = 1$ を満たすもの（フィボナッチ数列）。