応用線形代数演習 I (塩田教官)　　**No.13**

テーマ : ベクトル空間の基底と次元

本プリントでは V は体 $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間を表す。

【基底】$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in V$ とする。

- $V = \langle\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \,\rangle$ が成り立つとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は V の**生成系**である、或いは $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ **は V を生成する** と言う。
- 次の 2 条件が成り立つとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は V の **基底** (きてい) であると言う:
  (a) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は V の生成系、すなわち $V = \langle\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \,\rangle$
  (b) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は一次独立

【定理 A】$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が V の基底ならば、$\forall \boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{a}_n$$

を満たすスカラーの組 $(x_1, \cdots, x_n)$ が唯一通り定まり、これによって V に座標を入れることができる。

【定理 B】ふたとおりのベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ および $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ が共に V の基底ならば $n = m$ が成り立つ。

【次元】
- V が有限個のベクトルからなる基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を持つとき、その個数 n を V の次元と言い、$\dim V = n$ と表す。
- $V = \{\, \mathbf{0} \,\}$ のとき次元は 0 と定める。
- 有限個のベクトルからなる基底が存在しないとき V は無限次元であると言い、$\dim V = \infty$ 表す。

【例】$\mathbf{K}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbf{K}^n$ の基底で、$\dim \mathbf{K}^n = n$.

【例】n 次以下の x の多項式のなすベクトル空間 $\mathbf{K}_n[x]$ において、

$$1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^n$$

は基底であり、従って $\dim \mathbf{K}_n[x] = n + 1$.

【定理 C】$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k \in V$ が一次独立ならばこれらを含む V の基底が存在する。

【定理 D】$V = \langle\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k \,\rangle$ ならば $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の中から V の基底が取れる。

【定理 E】$\dim V = n$ がわかっているとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in V$ が一次独立ならば $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は V の基底になる。

【定理 F】W が V の部分空間ならば、

(1) $\dim W \leqq \dim V$

(2) $\dim W = \dim V$ ならば $W = V$

【基底の探し方その 1】 (1) $\mathbf{0}$ でないベクトルをひとつ取り $\boldsymbol{a}_1$ とする。

(2) $V \neq \langle\, \boldsymbol{a}_1 \,\rangle$ ならば $\boldsymbol{a}_2 \notin \langle\, \boldsymbol{a}_1 \,\rangle$ をみたす $\boldsymbol{a}_2$ を取る。

(3) 以下、$V \neq \langle\, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k \,\rangle$ なる限り $\boldsymbol{a}_{k+1} \notin \langle\, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k \,\rangle$ をみたす $\boldsymbol{a}_{k+1}$ を取ってゆく。

【基底の探し方その 2】 V の生成系 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が先に求まっているとする。

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が一次独立ならそのまま基底になっている。

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が一次従属ならば

$$\boldsymbol{a}_j \in \langle\, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_k \,\rangle$$

となる番号 j を探して $\boldsymbol{a}_j$ を除去する。

(3) 以下、ベクトルの組が一次従属である限り同じ作業を続ける。

【一次独立性の判定法の工夫】 V の基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が先に与えられているとき、$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ の一次独立性は次のように判定できる。

(1) $m > n$ ならばいつでも一次従属。

(2) 各 $j = 1, \cdots, m$ に対して

$$\boldsymbol{b}_j = p_{1j}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + p_{nj}\boldsymbol{a}_n$$

を満たすスカラー p_{ij} を求めて (n, m) 行列 $P = (p_{ij})$ を作る。

(3) $m = \mathrm{rank}(P)$ ならば一次独立、そうでなければ一次従属。

【139】 x の多項式 $f(x), g(x), h(x)$ を　$f(x) = 1, \quad g(x) = x, \quad h(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$　とすると $\{\, f(x), g(x), h(x) \,\}$ は $\mathbf{R}_2[x]$ の基底となることを示せ。

【140】 2 次以下の実数係数多項式 $p(x)$ について次の 2 条件は同値であることを示せ。

(a) 任意の整数 n について $p(n)$ は整数である。

(b) $p(0), p(1), p(2)$ はすべて整数である。　(前問がヒント)

【141】 3 次以下の実数係数多項式 $f(x)$ で 1 と 2 を共に根にもつものの成す実ベクトル空間 V の基底と次元を求めよ。