

応用線形代数演習 I (塩田教官)

No.9

テーマ：余因子・余因子行列、クラメル公式、ファン・デル・モンドの行列式
以下、本プリントでは行列のサイズ n は $n \geq 2$ とする。

【余因子・余因子行列】 $A = (a_{ij})$ を n 次行列とする。

- A から第 i 行と第 j 列を取り除いてできる $(n-1)$ 次行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けた数を A の (i, j) 余因子 と呼び、通常 $\tilde{a}_{ij}$ と書く。
- $\tilde{a}_{ij}$ を (j, i) 成分とする n 次行列 $\tilde{A} = \text{adj}(A) = (\tilde{a}_{ji})$ を A の余因子行列 と呼ぶ。

【注意】 • 余因子行列の定義で i と j を逆にすることは忘れやすいので特に注意。

- $(-1)^{i+j}$ は例えば 3 次行列ならば $\begin{matrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{matrix}$.

- 【例】 • $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ から第 1 行と第 2 列を取り除くと 1 次行列 (c) が得られ、 $(-1)^{1+2} = -1$ ゆえ $\tilde{a}_{12} = -c$. 同様に $\tilde{a}_{11} = d, \tilde{a}_{21} = -b, \tilde{a}_{22} = a$. 従って $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ から第 1 行と第 2 列を取り除くと 2 次行列 $\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix}$ が得られ、その行列式は $di - fg$. $(-1)^{1+2} = -1$ ゆえ $\tilde{a}_{12} = -(di - fg)$ 等々。

【定理 A】 (1) (行列式の余因子展開) $|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{a}_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ki} \tilde{a}_{ki}$.

(2) $i \neq j$ ならば $\sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{a}_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ki} \tilde{a}_{kj} = 0$.

(3) $A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| E_n$.

(4) (逆行列の公式) $|A| \neq 0$ ならば A は正則で、 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$.

【98~100】 次の行列の余因子行列を計算し、正則な場合はその逆行列を求めよ。

$$\begin{array}{lll} \text{【98】} & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} & \text{【99】} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{【100】} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

【101】 A が整数成分の n 次正方行列ならば、次の 2 条件は同値であることを示せ。

- (1) $|A| = \pm 1$ (2) A は正則で、 A^{-1} の成分も全て整数。

【102~103】 余因子展開を利用して次の行列式を計算し、答えを因数分解せよ。

$$\begin{array}{ll} \text{【102】} & \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} & \text{【103】} & \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} \end{array}$$

【104～105】 n 次行列 A について次を示せ。

【104】 $|A| = 0$ ならば $|\tilde{A}| = 0$

【105】 (1) $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$ (2) 「 A が正則」 $\iff$ 「 $\tilde{A}$ が正則」

【106～108】 n 次正則行列 A, B について次を示せ。

【106】 $\widetilde{AB} = (\tilde{B})(\tilde{A})$

【107】 $\widetilde{({}^tA)} = {}^t(\tilde{A})$

【108】 $\widetilde{(\tilde{A})} = |A|^{n-2}A$

【109*】 【106～108】 は A, B が正則でなくても成立することを示せ。

【定理 B (クラメルの公式)】 $A = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ を n 次正則行列、 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ を n 項ベクトル、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を未知数の n 項ベクトルとすると、連立一次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

の解は次の式で求められる：

$$\begin{cases} x_1 = \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n) / \det(A) \\ x_2 = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n) / \det(A) \\ \vdots \\ x_n = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{b}) / \det(A) \end{cases}$$

【110 (ファン・デル・モンドの行列式)】

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \quad \text{を示せ。}$$

【111】 xy -平面内に x 座標の異なる $n+1$ 個の点 $P_0, P_1, \dots, P_n$ を取るとき、これらの点を全て通る n 次関数 $y = f(x)$ のグラフが唯一つつ存在することを示せ。