

【行列式の定義】 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して次の式で定まるスカラーを A の行列式 と言い、 $\det A$ 、 $\det(A)$ 、 $|A|$ 、 $|a_{ij}|$ などの記号で表す：

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

和は n 文字の置換全てにわたる和である。

($a_{\sigma(1)1}, \dots, a_{\sigma(n)n}$ は n 個の列からひとつずつ成分を取り出して、それが n 個の行にもひとつずつ入っているような成分の取り出し方で、それらの数を掛けて符号 $\text{sgn}(\sigma)$ を付けて足し合わせたものが行列式である。)

【1 次・2 次・3 次の行列式】 1 次・2 次・3 次の行列式は次のようになる：

$$\begin{aligned} |a| &= a \quad (\text{絶対値と同じ記号だが区別せよ}) \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= ad - bc \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \end{aligned}$$

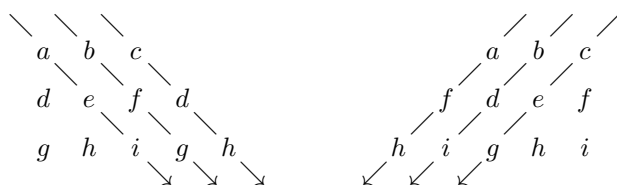
【定理 A】 (1) n 次行列 $A = (a_{ij})$ が対角行列、上三角行列または下三角行列ならば

$$|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

(2) 特に $|E_n| = 1$, $|O_n| = 0$.

【3 次の行列式の覚え方 (サラスの方法)】 図で右下がりの線上の 3 つの数字を掛けて足し、左下がりの線上の 3 つの数字を掛けて引く。

(4 次以上ではこの様な便利な覚え方はない。)



【75～76】 次の行列式をサラスの方法を用いて計算し、答えを因数分解せよ。

【75】 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$

【76】 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

【77】 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

【78～80】 次の 4 次の行列式の値を定義に従って計算せよ。

【78】 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

【79】 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

【80】 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

【81】 全ての成分がそれぞれ 0 か 1 であるような 3 次行列の行列式の最大値は幾らか。

【82】 $n \geq 2$ のとき、全ての成分が奇数である n 次行列の行列式は偶数であることを示せ。

【定理 B】 n 次行列 A に対して $|{}^t A| = |A|$ が成り立つ。すなわち

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

が成り立つ。

【記号】 列ベクトル表示が $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$ である様な n 次行列 A の行列式を $|A| = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ と書く。

【定理 C】 上の記号のもとで次が成り立つ。

(1) スカラー λ に対して $\det(\lambda \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \lambda \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$.

(2) 第 1 列が $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ と書けているとき、

$$\det(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n).$$

(3) 第 j 列と第 k 列を入れ換えると、

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n) = -\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n).$$

(4) 公式 (1), (2) は他の列についても成り立つ ($\because$ (3)) 。

((1), (2) は 行列式の線形性、(3) は 行列式の交代性 と呼ばれる。)

【定理 D】 上の定理より次が導かれる。

(1) n 次行列 A のひとつの列ベクトルが $\mathbf{0}$ ならば $|A| = 0$.

(2) n 次行列 A のふたつの列ベクトルが等しければ $|A| = 0$.

(3) n 次行列 $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$ の第 j 列に第 k 列のスカラー倍 $\lambda \mathbf{a}_k$ ($k \neq j$) を加えた n 次行列を B とするとき、 $|A| = |B|$. すなわち

$$\det(\cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_k, \cdots) = \det(\cdots, \mathbf{a}_j + \lambda \mathbf{a}_k, \cdots, \mathbf{a}_k, \cdots).$$

【定理 E】 n 文字の置換 $\rho \in S_n$ に対して

$$\det(\mathbf{a}_{\rho(1)}, \dots, \mathbf{a}_{\rho(n)}) = \text{sgn}(\rho) \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

が成り立つ。

【定理 F】 定理 C, 定理 D, 定理 E は行ベクトル表示についても 成り立つ (定理 B より) 。

【83】 スカラー λ と n 次行列 A に対して $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ を示せ。

【84】 n が奇数ならば、 n 次交代行列 A に対して $|A| = 0$ であることを示せ。(後に述べる定理より、このことから奇数次交代行列は正則ではないことがわかる。)