

テーマ：写像の全射性・単射性、置換の定義と計算法

—— 次回 行列式 を定義する為に、今回は置換を学ぶ。 ——

【全射・単射・全単射】写像 $f: X \rightarrow Y$ は、

- $\forall y \in Y$ に対し 「 $y = f(x)$ となる $x \in X$ が必ず存在する 」 とき、**全射 (ぜんしゃ)** である と言う。
- $\forall y \in Y$ に対し 「 $y = f(x)$ となる $x \in X$ が高々ひとつしか存在しない 」 とき、**単射 (たんしゃ)** である と言う。
- 全射であり単射でもある写像を **全単射** または **一対一写像** と言う。
- ◇ 全単射には逆写像が存在する。

【証明の基本パターン】 • 全射であること : $\forall y \in Y$ に対して $y = f(x)$ を満たす $x \in X$ を提示する。

- 全射でないこと : 「 $\forall x \in X$ に対して $y \neq f(x)$ 」 となる $y \in Y$ の例を挙げる。
- 単射であること : 式 「 $f(a) = f(b)$ 」 から式 「 $a = b$ 」 を導く。
- 単射でないこと : 「 $a \neq b$ かつ $f(a) = f(b)$ 」 なる $a, b \in X$ の例を挙げる。

【58】 任意の集合 X に対して、恒等写像 $f: X \rightarrow X; f(x) = x$ は全単射であることを示せ。

【59～61】 整数全体の集合を $\mathbf{Z}$ と表す。次の式で与えられる写像 $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ について、それぞれ全射であるか否か、単射であるか否か理由を付けて述べよ。

【59】 $f(x) = x^3$

【60】 $f(x) = 1 - x$

【61】 $f(x) = \left(\frac{x}{2} \text{ を越えない最大の整数} \right)$

【62】 X が有限集合ならば、写像 $f: X \rightarrow X$ の全射性と単射性は同値であることを示せ。

【63～68】 以下、ふたつの写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ を考える。

【63】 f と g が共に全射ならば合成写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ も全射であることを示せ。

【64】 f と g が共に単射ならば合成写像 $g \circ f$ も単射であることを示せ。

【65】 合成写像 $g \circ f$ が全射ならば g は全射であることを示せ。

【66】 合成写像 $g \circ f$ が単射ならば f は単射であることを示せ。

【67】 $g \circ f$ は全射だが f は全射でない様な X, Y, Z, f, g の例を作れ。

【68】 $g \circ f$ は単射だが g は単射でない様な X, Y, Z, f, g の例を作れ。

【注意】 上の問題より次のことがわかる。

- (1) f と g が共に全単射ならば合成写像 $g \circ f$ も全単射である。
- (2) ふたつの写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ があって、合成写像 $g \circ f: X \rightarrow X$ と $f \circ g: Y \rightarrow Y$ が共に全単射ならば f, g はいずれも全単射である。

【置換】 • 集合 $M = \{1, 2, \dots, n\}$ から M への全単射を n 文字の置換 と呼ぶ。

• n 文字の置換全体の集合を S_n と書き、 n 次対称群 と呼ぶ。

• $\sigma \in S_n$ が $\sigma(1) = a_1, \sigma(2) = a_2, \dots, \sigma(n) = a_n$ なる置換のとき、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

と表す。(行列の記号とまぎわらしいが、置換は置換と思って計算する。)

• 列の並べ方は自由に変えて良い： $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 等々。

• $a_1 \mapsto a_2 \mapsto \cdots \mapsto a_m \mapsto a_1$ なる置換 σ を (長さ m の) 巡回置換 と言い、簡単に $\sigma = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m)$ と表す。

• $k \mapsto \ell \mapsto k$ なる置換 (2 文字のみ入れ換える置換) σ を 互換 と言い、簡単に $\sigma = (k \ \ell)$ と表す。

• 写像の合成により置換の積を定義する： $\sigma\tau := \sigma \circ \tau$ 。

この積により、恒等写像 1_M を単位元として S_n は群を成す。

◇ 任意の置換は幾つかの互換の積として表すことができる。

◇ $\sigma \in S_n$ を互換の積として表すとき、互換の個数 s の偶奇は表し方に依らない。このとき $\text{sgn}(\sigma) := (-1)^s$ を σ の 符号 と言う。

• $\text{sgn}(\sigma) = 1$ なる置換を 偶置換、 $\text{sgn}(\sigma) = -1$ なる置換を 奇置換 と言う。

◇ $\text{sgn}(1_M) = 1$, $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau)$, $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma^{-1})$ が成り立つ。

【69】巡回置換 $\sigma = (1 \ 2 \ \cdots \ n)$ について $\sigma^n = 1_M$ を示せ。

【70】巡回置換 $\sigma = (1 \ 2 \ \cdots \ n)$ の符号を計算せよ。

【71】置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ の符号を計算せよ。

【72】 $n \geq 2$ のとき n 文字の偶置換、奇置換はそれぞれ $\frac{n!}{2}$ 個ずつあることを示せ。

【73】任意の置換は $(k \ k+1)$ の形の幾つかの互換の積として表すことができることを示せ。

【74】阿弥陀くじ

1	2	3	4	5	6
~~~~	~~~~	~~~~	~~~~	~~~~	~~~~
5	2	4	1	6	3

を完成せよ。