

テーマ：掃き出し法による逆行列の計算・連立一次方程式の解法

【定理 A】 n 次正方行列 A について、次はすべて同値である。

- (1) A は正則。
- (2) $\text{rank}(A) = n$.
- (3) A は基本行列の積として表すことができる。
- (4) $AX = E$ を満たす n 次行列 X が存在する。($X = A^{-1}$ となる。)
- (5) $XA = E$ を満たす n 次行列 X が存在する。($X = A^{-1}$ となる。)
- (6) A は行基本変形だけで E に変形できる。
- (7) A は列基本変形だけで E に変形できる。

【定理 B (掃き出し法)】 n 次正方行列 A に対して $(n, 2n)$ 次行列 $B := (A | E_n)$ を考えるとき、次が成り立つ。

- (1) A が正則ならば、適切な行基本変形によって B は $(E_n | X)$ の形に変形され、このとき $X = A^{-1}$ となる。
- (2) 行基本変形によって B の左ブロックに $\mathbf{0}$ が現われれば、 A は正則でない。

【注意】 掃き出し法では列基本変形を使ってはいけない !!

【例 1】 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
 $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ゆえ A は正則で、 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

【例 2】 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & -2 & 1 \end{pmatrix}$ となり、左ブロックに $\mathbf{0}$ が現われたので A は正則ではない。

【49~53】 次の正方行列に掃き出し法を適用して正則かどうか判定し、正則な場合はその逆行列も求めよ。

【49】 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

【50】 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【51】 $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

【52】 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

【53】 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

【54】 ふたつの n 次正方行列 A, B について、積 AB が正則ならば A, B は共に正則であることを示せ。

