テーマ:掃き出し法による逆行列の計算・連立一次方程式の解法

【定理 A】n 次正方行列 A について、次はすべて同値である。

(1) A は正則。

- (2) $\operatorname{rank}(A) = n$.
- (3) A は基本行列の積として表すことができる。
- (4) AX = E を満たす n 次行列 X が存在する。($X = A^{-1}$ となる。)
- (5) XA = E を満たす n 次行列 X が存在する。($X = A^{-1}$ となる。)
- (6) A は行基本変形だけで E に変形できる。
- (7) A は列基本変形だけで E に変形できる。

【定理 B (掃き出し法)】n 次正方行列 A に対して (n,2n) 次行列 $B:=(A\mid E_n)$ を考えるとき、次が成り立つ。

- (1) A が正則ならば、適切な行基本変形によって B は $(E_n \mid X)$ の形に変形され、このとき $X = A^{-1}$ となる。
- (2) 行基本変形によって B の左ブロックに $\mathbf{0}$ が現われれば、A は正則でない。

【注意】掃き出し法では列基本変形を使ってはいけない!!

【例 1】
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 のとき、
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
 ゆえ A は正則で、 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

【例 2】 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ \longrightarrow $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ となり、左ブロックに $\mathbf{0}$ が現われたので A は正則ではない。

【49~53】次の正方行列に掃き出し法を適用して正則かどうか判定し、正則な場合はその逆行列も求めよ。

【54】 ふたつの n 次正方行列 A,B について、積 AB が正則ならば A,B は共に正則であることを示せ。

【定理 C】 $A = (a_{ij})$ を (m, n) 行列、 $\mathbf{b} = (b_i) \in \mathbf{R}^m$ を定数ベクトル、n 項列ベクトル $\mathbf{x} = (x_i)$ を 未知数のベクトルとして、連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 、すなわち

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases} \dots \dots (*)$$

を考えるとき、A を (*) の 係数行列、(m, n+1) 行列 $(A|\mathbf{b})$ を (*) の 拡大係数行列 と呼ぶ。

- (1) (*) が解を持つ必要十分条件は $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid \boldsymbol{b})$ である。
- (2) $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid \boldsymbol{b})$ のとき、(*) の解は $n \operatorname{rank}(A)$ 個の パラメータ (任意定数) を用いて書き表すことができる。 $n \operatorname{rank}(A)$ を 解の自由度 と言う。

【掃き出し法による連立一次方程式の解法】

(1) 拡大係数行列 $(A \mid b)$ に行基本変形のみを施して次の形の階段行列に変形する。

$$A' = \begin{pmatrix} \hline & 1 & \cdots & & & b'_1 \\ & & 1 & \cdots & & \vdots \\ & & & 1 & \cdots & b'_r \\ & & & & * \end{pmatrix} \qquad (r = \operatorname{rank}(A))$$

- (2) * の部分に 0 でない数があれば解はない。
- (3)* の部分が全て 0 ならば、A' で段のない列 k についての x_k がパラメータとなり、段のある列 j についての x_j が そのパラメータ達で表される。

【55~56】掃き出し法を用いて次の連立一次方程式に解が存在するか否かを判定し、解を持つときはその一般形を求めよ。

[55]
$$\begin{cases} x + y + z + 6u & = -3 \\ x - 2y - 8z - 4u + 4v = 7 \\ 2x - 3y - 13z - 5u + 7v = 11 \\ 2x - 5y - 19z - 6u + 4v = 12 \end{cases}$$
 [56]
$$\begin{cases} x + 2y + z + 6u + 13v = 5 \\ x + y + 3z + 2u + 13v = 0 \\ y + 2u + 6v = 1 \\ 2x + y + 6z + 2u + 27v = -15 \\ x - 2z + 5u - 5v = 3 \end{cases}$$

【57】次の連立一次方程式が解を持つ為の必要十分条件をaで表せ。

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = a \\ 3x + 4y + 5z = a^2 \end{cases}$$