応用線形代数演習 I (塩田教官) **No.4**

テーマ：基本行列、行列の基本変形、行列の階数

【基本行列】 次の形の 3 種類の正方行列を **基本行列** と言う：

$$
\begin{aligned}
P(i,j) &= P_n(i,j) &&= (\text{単位行列 } E_n \text{ の第 } i \text{ 行と第 } j \text{ 行を入れ換えたもの})\\
Q(i;c) &= Q_n(i;c) &&= (\text{単位行列 } E_n \text{ の } (i,i) \text{ 成分を } c \text{ に変えたもの})\\
R(i,j;d) &= R_n(i,j;d) &&= (\text{単位行列 } E_n \text{ の } (i,j) \text{ 成分を } d \text{ に変えたもの})
\end{aligned}
$$

ただし i, j は番号、c, d はスカラーで $i \neq j$, $c \neq 0$ とする。

【例】 2 次の基本行列は次のいずれかの形である：

$$
P(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(1;c) = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(2;c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},
$$
$$
R(1,2;d) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R(2,1;d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}
$$

ただし c, d はスカラーで、$c \neq 0$.

【命題 A】 基本行列は正則行列であり、その逆行列や転置行列も基本行列になる。実際

$$
P(i,j)^2 = E, \qquad Q(i;c)\,Q(i;\frac{1}{c}) = E, \qquad R(i,j;d)\,R(i,j;-d) = E,
$$
$$
{}^tP(i,j) = P(i,j), \qquad {}^tQ(i;c) = Q(i;c), \qquad {}^tR(i,j;d) = R(j,i;d)
$$

【行基本変形・列基本変形】 行列に対する次の 3 種類の操作を **行基本変形** と言う (列に対する同様の操作を **列基本変形** と言う)：

(I) ふたつの行を入れ換える

(Ⅱ) ひとつの行を 0 でないスカラーでスカラー倍する

(Ⅲ) ひとつの行に他の行の適当なスカラー倍を加える

【命題 B】 **行基本変形**は**左から**基本行列を掛けることと等しい。また、**列基本変形**は**右から**基本行列を掛けることと等しい。例えば行基本変形は、

(I)	第 i 行と第 j 行を入れ換えること	= 左から $P(i,j)$ を掛けること
(Ⅱ)	第 i 行を c 倍すること	= 左から $Q(i;c)$ を掛けること
(Ⅲ)	第 i 行に第 j 行の d 倍を加えること	= 左から $R(i,j;d)$ を掛けること

【定理 C(階数)】 (1) 任意の (m,n) 行列 A は、適切な行基本変形によって次の形の行列 (階段行列と言う) に変形できる：

$$
\begin{pmatrix}
 & 1 & * & \cdots & & & & \cdots & * \\
 & & & & 1 & * & \cdots & \cdots & * \\
 & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & 1\ *\ \cdots & * \\
 & \text{O} & & & & & & &
\end{pmatrix}
$$

(大きい O は左下部分の成分が全て 0 であることを表し、$*$ は必ずしも 0 でない数が入ることを表す。)

(2) 任意の (m,n) 行列 A は、適切な行基本変形と列基本変形を組み合わせることによって次の形の行列 (標準形と言う) に変形できる :

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \qquad (\ 0 \leqq\ \exists r \leqq\ \min(m,n)\ )$$

(3) (1) の r と (2) の r は等しく、しかも変形の方法に依らずに A だけから定まる。そこで r を A の **階数** と呼び、$\mathrm{rk}(A)$、$\mathrm{rank}(A)$ などと表す。

(4) $\mathrm{rank}(A) = r$ であることと $\exists P, Q$: 正則行列 s.t. $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ となることは同値である。

(5) 特に n 次行列 A については、$\mathrm{rank}(A) = n$ であることと A が正則であることは同値である。

【系 D】 (m,n) 行列 A に対して、

(1) P が m 次正則行列、Q が n 次正則行列 $\Longrightarrow$ $\mathrm{rank}(PAQ) = \mathrm{rank}(A)$

(2) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^tA)$

【40〜44】 次の行列に基本変形を施して階段行列に変形し、その階数を述べよ。

【40】 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **【41】** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **【42】** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

【43】 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ **【44】** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【45】 (m,n) 行列 A を用いて $(m,2n)$ 行列 $P = (A\ A)$ を作るとき、$\mathrm{rank}\,(P) = \mathrm{rank}\,(A)$ であることを示せ。

【46】 (m,n) 行列 A を用いて $(m,2n)$ 行列 $P = (A\ \ -A)$ を作るとき、$\mathrm{rank}\,(P) = \mathrm{rank}\,(A)$ は成り立つか。

【47】 n 次行列 A に対して $\mathrm{rank}\,(A^2) = \mathrm{rank}\,(A)$ は成り立つか。

【48】 (m,n) 行列 A を用いて $(2m,2n)$ 行列 $P = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$ を作るとき、$\mathrm{rank}\,(P)$ を $\mathrm{rank}\,(A)$ で表せ。

【定理 E】 A を n 次行列とするとき、

$$A \text{ は正則でない} \iff \text{「或る } n \text{ 項ベクトル } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \text{ について } A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\text{」}$$