応用線形代数演習 I（塩田教官）　No.3

テーマ：区分け、正則行列、逆行列

【区分け】

- 行列を幾つかの横線と幾つかの縦線で区切って小行列（小さい行列）に分割することを **行列の区分け** と言う。
- 特に (m,n) 行列 A の第 j 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ と書いて

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$$

のように列ベクトルに分割することを **列ベクトル表示** と言う。また A の第 i 行ベクトルを $\boldsymbol{u}_i$ と書いて

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_m \end{pmatrix}$$

のように行ベクトルに分割することを **行ベクトル表示** と言う。

◇ 区分けされた行列の和・差、スカラー倍、転置は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \pm B_{11} & \cdots & A_{1s} \pm B_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} \pm B_{r1} & \cdots & A_{rs} \pm B_{rs} \end{pmatrix},$$

$$k\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kA_{11} & \cdots & kA_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ kA_{r1} & \cdots & kA_{rs} \end{pmatrix}, \quad {}^t\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA_{11} & \cdots & {}^tA_{r1} \\ \vdots & & \vdots \\ {}^tA_{1s} & \cdots & {}^tA_{rs} \end{pmatrix}$$

◇ (ℓ, m) 行列 A の列の分割の仕方と、(m,n) 行列 B の行の分割の仕方が等しいときには、小行列を成分のように扱って積 AB が計算できる（左右の掛け方を間違えてはいけない。）：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix}$$

ただし

$$C_{ij} := \sum_{k=1}^{s} A_{ik}B_{kj} = A_{i1}B_{1j} + \cdots + A_{is}B_{sj}$$

◇ 例えば、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP+BR & AQ+BS \\ CP+DR & CQ+DS \end{pmatrix},$$

$$A(\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_n) = (A\boldsymbol{b}_1 \cdots A\boldsymbol{b}_n), \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 B \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_m B \end{pmatrix}$$

【逆行列】

- A を n 次正方行列とする。

「$AX = XA = E_n$ を満たす n 次正方行列 X が存在する」

とき **A は正則である**、または **A は正則行列 (可逆行列) である** と言う。X を A の **逆行列** と呼び、A^{-1} と表す。

- 正則行列 A と自然数 ℓ に対して $A^{-\ell} := (A^{-1})^{\ell}$ と定める。このとき、指数法則は負の整数も含めて成立する。

【定理】 A, B を n 次正則行列、k を 0 でないスカラー、ℓ を自然数とするとき

$$(A^{-1})^{-1} = A, \qquad (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, \qquad ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}),$$
$$(A^{\ell})^{-1} = (A^{-1})^{\ell}, \qquad (AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$$

【定理】 n 次行列 A のひとつの列ベクトルが零ベクトルであれば A は正則でない。また、ひとつの行ベクトルが零ベクトルであっても A は正則でない。

【29〜31】 A, B, C, D, P, S を n 次正方行列、$E = E_n$, $O = O_n$, ℓ を自然数とするとき、次の式を示せ。

【29】 $\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}^2 = E_{2n}, \quad \begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix}^2 = -E_{2n}, \quad \begin{pmatrix} O & E \\ -E & E \end{pmatrix}^3 = -E_{2n}$

【30】 $\begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix}^{\ell} = \begin{pmatrix} E & \ell B \\ O & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & O \\ C & E \end{pmatrix}^{\ell} = \begin{pmatrix} E & O \\ \ell C & E \end{pmatrix}$

【31】 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & O \\ O & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP & O \\ O & DS \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}^{\ell} = \begin{pmatrix} A^{\ell} & O \\ O & D^{\ell} \end{pmatrix}$

【32〜34】 次の 3 次行列の逆行列を求めよ。

【32】 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **【33】** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **【34】** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

【35 (定理)】 m 次正方行列 P と n 次正方行列 S が共に正則行列であるとき、任意の (m, n) 行列 Q について $A = \begin{pmatrix} P & Q \\ O & S \end{pmatrix}$ と区分けされた行列 A は正則行列であり、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}QS^{-1} \\ O & S^{-1} \end{pmatrix}$$

であることを示せ。

【36】 正則行列 A が対称行列ならば A^{-1} も対称行列であることを示せ。また正則行列 A が交代行列ならば A^{-1} も交代行列であることを示せ。

【37】 正方行列 A は、或る自然数 ℓ に対して $A^{\ell} = O$ となるとき **べき零行列** であると言う。べき零行列は正則でないことを示せ。

【38】 正方行列 A がべき零行列ならば $B := E - A$ は正則であることを示せ。
(ヒント : $x^m - 1$ の因数分解)

【39】 O でない n 次行列 A は「$AB = O$ を満たす n 次行列 B ($B \neq O$) が存在する」とき、**零因子である** と言う。零因子は正則でないことを示せ。