ニュートン法による方程式の数値解法

ニュートン法は一般に

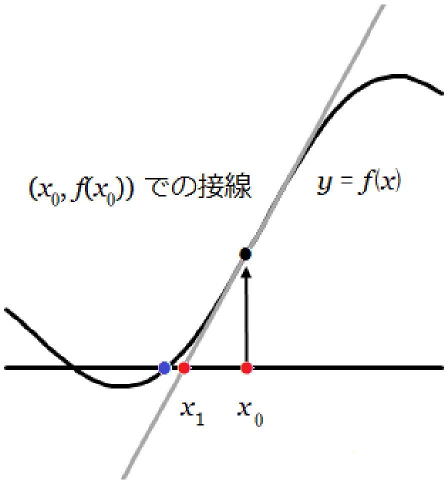
$$f(x) = 0$$

の形の方程式の近似解を与える数値計算法です。やることは至って簡単で、$f(x) = 0$ の解に近い x_0 の値から出発して、漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

に従って数列 $\{x_n\}$ を計算すれば、あっという間に解の近似値が得られる、というものです。

ニュートン法の原理は次のとおりです。



曲線 $y = f(x)$ の $\left(x_0, f(x_0)\right)$ での接線と x 軸との交点を $(x_1, 0)$ とすると、x_1 は x_0 よりはるかに解(青い点)に近くなっています。x_1 を式で書けば

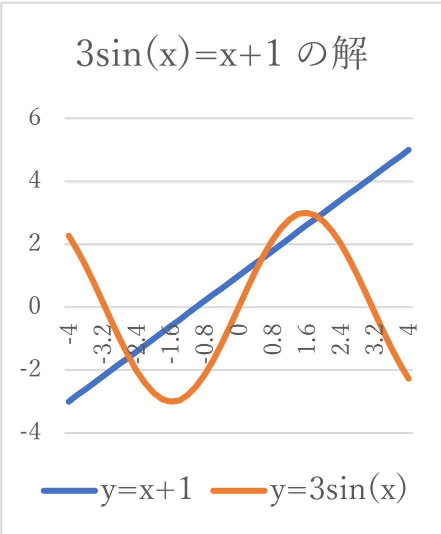
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

であり、同じことをやって x_1 から x_2、x_2 から x_3 … を求めているのが漸化式(1)です。

ケプラー方程式

$$3 \sin x = x + 1$$

に対してニュートン法を実行してみましょう。まず解のおおよその見当を付けるためにグラフを描いてみます。



解は $-3,\ 0,\ 2$ の付近にひとつずつあることがわかります。ケプラー方程式は

$$f(x) = x - 3\ \sin x + 1 = 0$$

と書くことができますので、この場合の漸化式は

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 3\ \sin x_n + 1}{1 - 3\ \cos x_n}$$

となります。$x_0 = -3,\ 0,\ 2$ としてそれぞれニュートン法を実行すると

$x_0 = -3.0000000000$	$x_0 = 0.0000000000$	$x_0 = 2.0000000000$
$x_1 = -2.6028592152$	$x_1 = 0.5000000000$	$x_1 = 1.8789793555$
$x_2 = -2.5850382033$	$x_2 = 0.5378033818$	$x_2 = 1.8683402498$
$x_3 = -2.5849686196$	$x_3 = 0.5384702347$	$x_3 = 1.8682540747$
$x_4 = -2.5849686185$	$x_4 = 0.5384704517$	$x_4 = 1.8682540690$
$x_5 = -2.5849686185$	$x_5 = 0.5384704517$	$x_5 = 1.8682540690$

となり、いずれも5ステップで収束して解が求まりました。