組合せとグラフの理論　（塩田）

— 最短路問題・最小連結子問題・郵便配達員問題・巡回セールスマン問題 —

1. 最短路問題

連結な重み付きグラフ G において、出発点 s から目的地 t への最短路を求める問題

ダイクストラ法

入力：連結な重み付きグラフ G と、出発点 s、目的地 t
出力：最短の s-t 道

1° 全ての頂点 v に仮ラベル $\ell(v)$ を発行する。
- 出発点 s のラベルは $\ell(s) = 0$
- s 以外の頂点 v のラベルは $\ell(v) = \infty$

2° 親を覚える為のリストを用意する。

3° 仮ラベルが最小の頂点 x をひとつ選び、$\ell(x)$ を永久ラベルに昇格させる。

4° $x =$ (目的地 t) であれば、t から親を辿って最短路を出力し、終了。

5° そうでなければ、x の、すべての未昇格な隣接点 v に対し、

$$\ell(x) + w(xv) < \ell(v)$$

であれば

$$\text{新 } \ell(v) = \ell(x) + w(xv), \qquad (v \text{ の親 }) = x$$

と更新する。

6° 3° へ戻る。

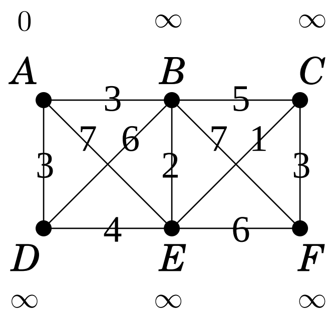
※　次の追加ルールがあれば誰がやっても同じ最短路が得られる。

追加ルール

ステップ 3° で候補 x が複数あるときは、親の番号（アスキーコード、アルファベット順 etc.）が一番小さいもののうち、自分自身の番号も一番小さいものを選ぶ。

実行例

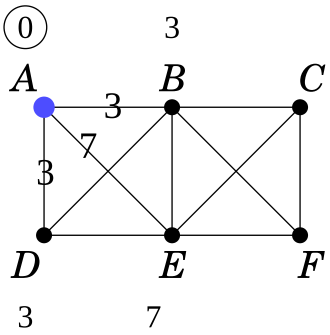
右の地図について、出発点 $s = A$ から目的地 $t = F$ への最短路を求めてみる。ラベルの初期状態は図の通り。



以下、永久ラベルには ◯ を付け、$=$ は仮ラベルが更新されたことを表す。また、永久ラベルに昇格したばかりの頂点を青色で示し、親子関係は赤い辺で表す。なお、仮ラベル ∞ は省略する。

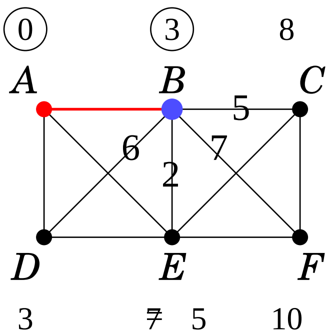
まず出発点の $\ell(A)$ を永久ラベルに昇格させる。

A の隣接点 B, D, E の仮ラベルを、A からの距離 3, 3, 7 に更新する。



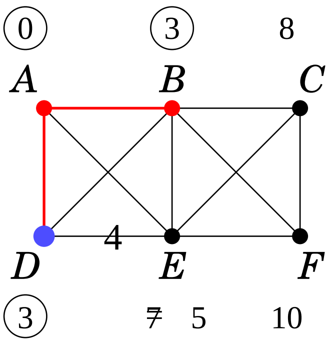
仮ラベル 3 の頂点 B, D は親が同じ A なので、アルファベット順で若い方の $\ell(B)$ を永久ラベルに昇格させる。

B の未昇格な隣接点の仮ラベルを 5° に従って更新する。特に E は B を経由したルートの方が短いので仮ラベルが 7 から 5 に減る。

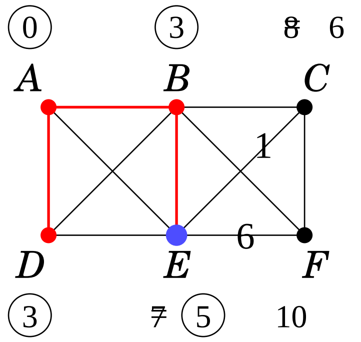


最小の仮ラベル $\ell(D)$ を永久ラベルに昇格させる。

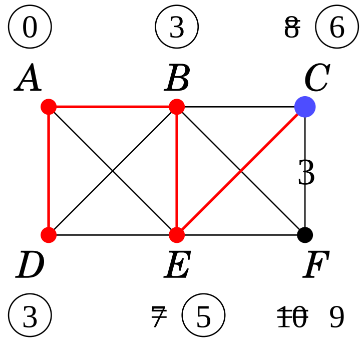
D の未昇格な隣接点は E のみだが、 D を経由しても近くならないので仮ラベルは更新されない。



最小の仮ラベル $\ell(E)$ を永久ラベルに昇格さる。
C は E を経由したルートの方が短いので仮ラベルが 8 から 6 に減っている。

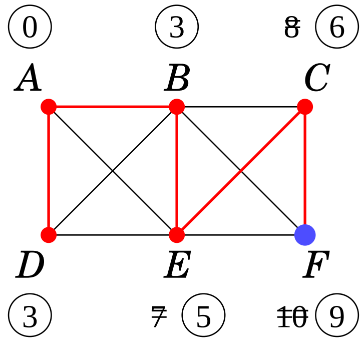


最小の仮ラベル $\ell(C)$ を永久ラベルに昇格させる。
F は C を経由したルートの方が短いので仮ラベルが 10 から 9 に減っている。



目的地の $\ell(F)$ が永久ラベルに昇格して終了する。
最短路は $A \to B \to E \to C \to F$.

※　慣れてくればこの絵ひとつで作業できるようになる。



2. 最小連結子問題

連結な重み付きグラフ G において、重み最小の全域木 T を求める問題

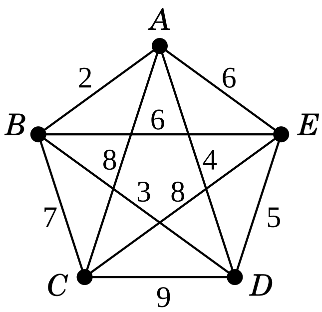
クラスカル法

入力：連結な重み付きグラフ G
出力：重み最小の全域木 T

1° $n = (G$ の頂点数 $)$, $j = 1$ とおく。
2° (辺集合として) T の初期値は空集合 $\emptyset$ とする。
3° T に付加しても閉路を作らない辺のうち、重み最小のものを e_j とする。
4° T に e_j を付加し、$j \leftarrow j + 1$.
5° $j = n$ ならば T を出力して終了。そうでなければ 3° へ戻る。

実行例

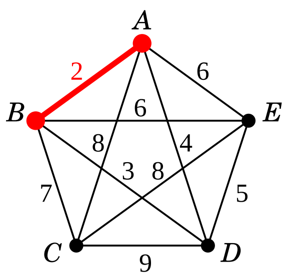
右のグラフでクラスカル法を実行してみる。
重みの小さい順に辺をソートして考え、



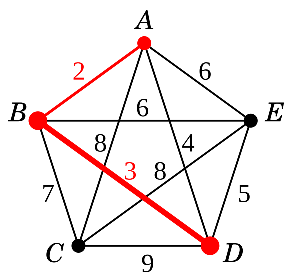
重み	辺	処理
2	AB	採用して $e_1 = AB$
3	BD	採用して $e_2 = BD$
4	AD	不採用
5	DE	採用して $e_3 = DE$
6	AE	不採用
6	BE	不採用
7	BC	採用して $e_4 = BC$

図示すると次のとおり。赤い辺は採用、青い辺は閉路を作ってしまうので不採用。

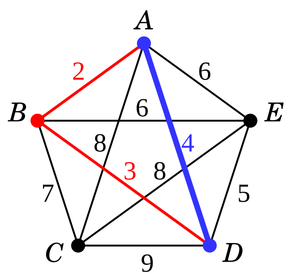
(1)



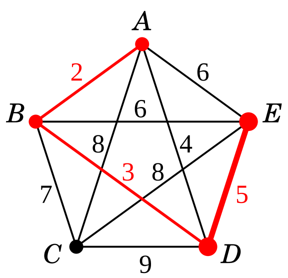
(2)



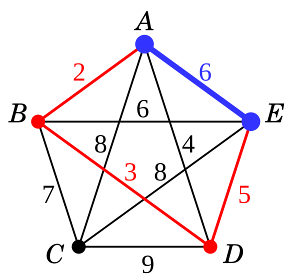
(3)



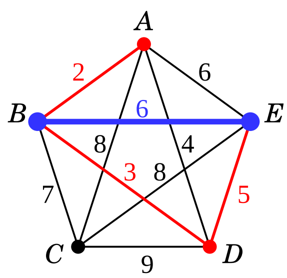
(4)



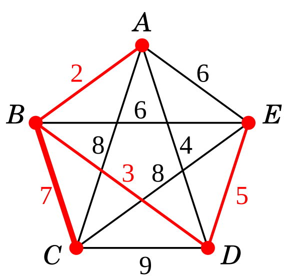
(5)



(6)



(7)



3. 郵便配達員問題

連結な重み付きグラフ G において、全ての辺を 1 回以上通る、重み最小の閉じた歩道を求める問題

オイラーグラフの場合

任意のオイラーサーキットが解になる。

オイラーグラフでない半オイラーグラフの場合

奇数次数の 2 頂点を u, v とするとき、最短の u-v 道 P と、v から u への一筆書き Q をつないだ歩道が最適解になる。

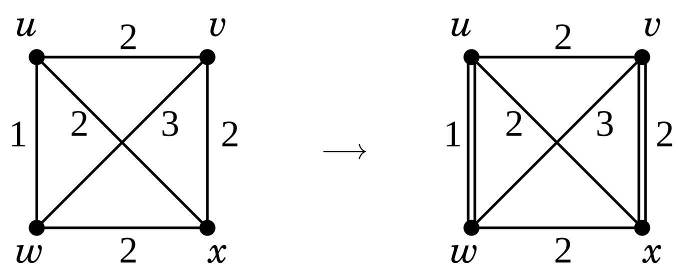
奇数次数の頂点が 4 個の場合の例

奇数次数の 4 頂点を u, v, w, x とするとき、

(1) 最短の u-v 道と、最短の w-x 道
(2) 最短の u-w 道と、最短の v-x 道
(3) 最短の u-x 道と、最短の v-w 道

の 3 通り組合せのうち、距離の合計が最小の場合の、最短路上の辺を二重化したグラフのオイラーサーキットが最適解となる。

例えば次のグラフではでは、uw と vx を 2 重化すれば追加の重みが最小でオイラーグラフにできる。

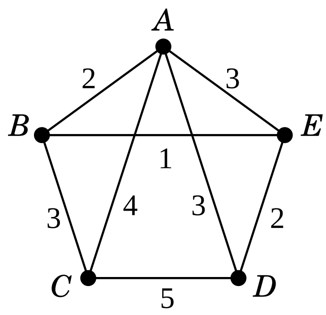


奇数次数の頂点が多くなると考えるべき組合せが膨大になるので、マッチング・アルゴリズムを応用することになる。

4. 巡回セールスマン問題

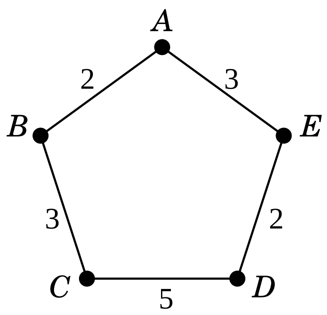
重み付きハミルトングラフ G において、重み最小のハミルトンサイクル C を求める問題

グラフが小さければ全検索で答が見つかる。たとえば次のグラフ

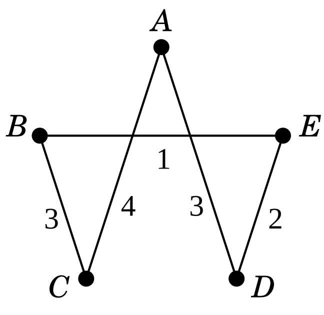


ではハミルトンサイクルは次の 4 つで、

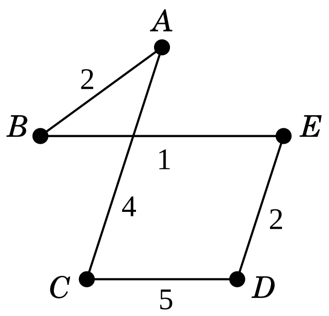
$C_1 =$



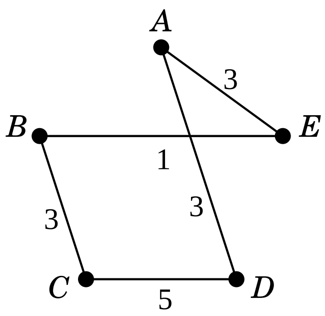
$C_2 =$



$C_3 =$



$C_4 =$



$w(C_1) = 15,\ w(C_2) = 13,\ w(C_3) = 14,\ w(C_4) = 15$ のうち最小のものは $w(C_2) = 13.$

しかし、巡回セールスマン問題を解く高速なアルゴリズムは見つかっていない。巨大なグラフでは、膨大な時間を掛けて最適解を求めるより、

- 遺伝的アルゴリズム
- シミュレーテッド・アニーリング法

などを使って「ましな解」を見つける方が現実的である。