組合せとグラフの理論 （ 塩田 ）

— 最大フロー・最小カット定理, メンガーの定理 —

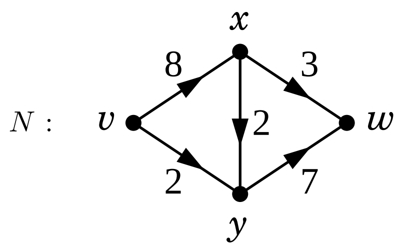
1. ネットワークのカット

有向グラフ $D=(V,A)$ 上のネットワーク $N=(D,\Psi)$ とその入口 v, 出口 w は前回の通りとする。

定義

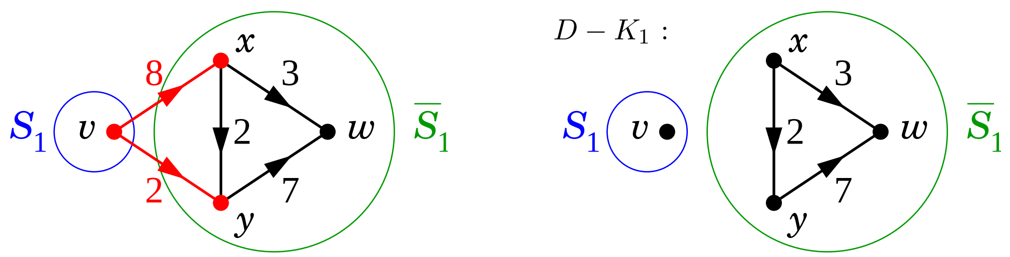
- $V \supset S$ に対し、$\overline{S}=V-S$ をその補集合とし、$a=xy$ ($x\in S,\ y\in\overline{S}$) の形の弧全ての集合を $(S,\overline{S})$ と表す。
- 特に $v\in S,\ w\in\overline{S}$ のとき $K=(S,\overline{S})$ を「N のカット」と呼ぶ。
- N のカット K に属する弧の容量の和を「カット K の容量」と呼ぶ。

例えば

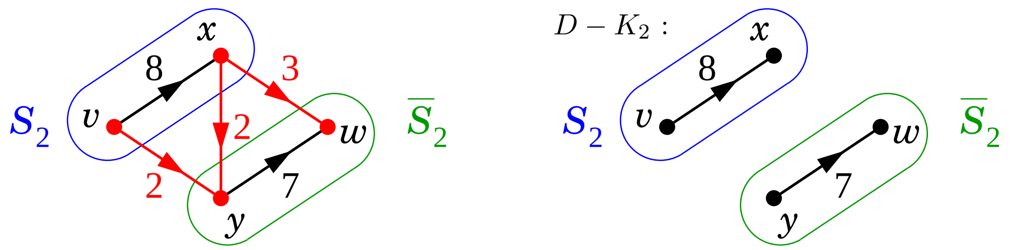


のカットは次の 4 つ。

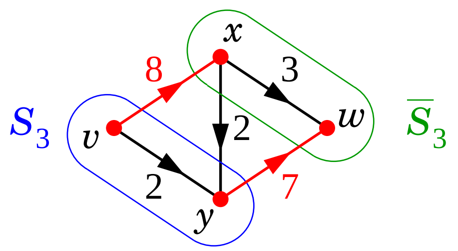
(1) $S_1=\{v\},\ \overline{S_1}=\{x,y,w\}$ のとき、赤い弧たちがカット $K_1=(S_1,\overline{S_1})=\{vx,vy\}$ で、その容量は $\Psi(K_1)=\Psi(vx)+\Psi(vy)=8+2=10$.

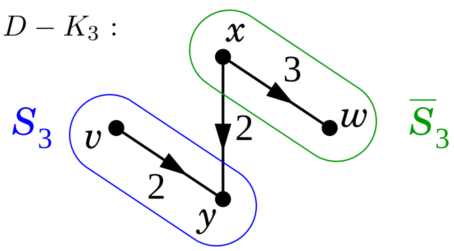


(2) $S_2=\{v,x\},\ \overline{S_2}=\{y,w\}$ のとき、$K_2=(S_2,\overline{S_2})=\{vy,xy,xw\},\ \Psi(K_2)=2+2+3=7$.

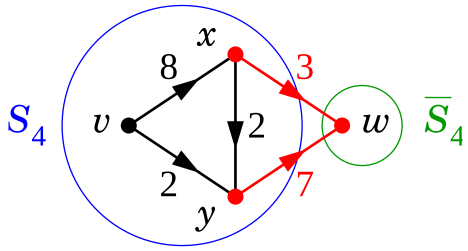


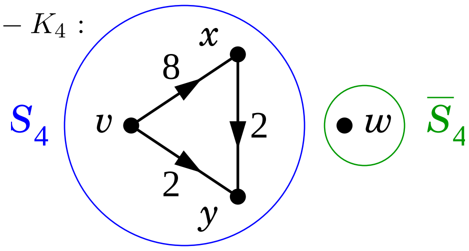
(3) $S_3=\{v,y\}$, $\overline{S_3}=\{x,w\}$ のとき、$K_3=(S_3,\overline{S_3})=\{vx,yw\}$, $\Psi(K_3)=8+7=15$.





(4) $S_4=\{v,x,y\}$, $\overline{S_4}=\{w\}$ のとき、$K_4=(S_4,\overline{S_4})=\{xw,yw\}$, $\Psi(K_4)=3+7=10$.





2. 最大フロー・最小カット定理

補助命題

φ を N の任意のフロー、K を N の任意のカットとすると

$$(\varphi \text{ の値 }) \leqq (K \text{ の容量})$$

が成り立つ。

最大フロー・最小カット定理

φ を N の最大フロー、K を N の最小カットとすると

$$(\varphi \text{ の値 }) = (K \text{ の容量})$$

が成り立つ。

系

N のフロー φ と、 N のカット K が

$$(\varphi \text{ の値 }) = (K \text{ の容量})$$

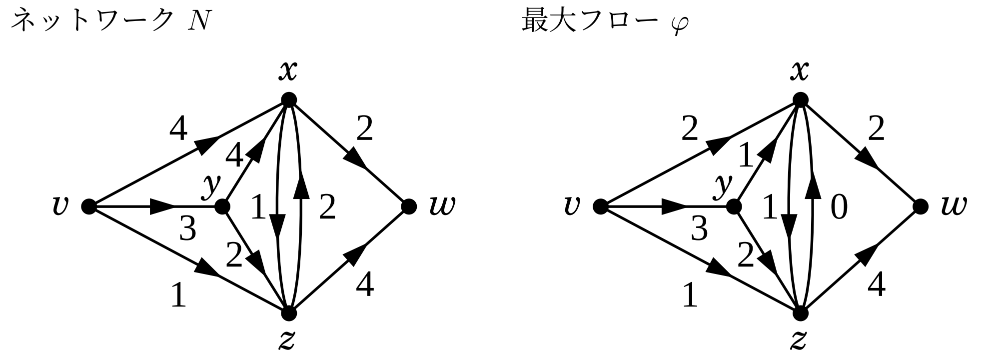
をみたせば、φ は最大フロー、K は最小カットである。

従って、適当に見つけたフロー φ とカット K が

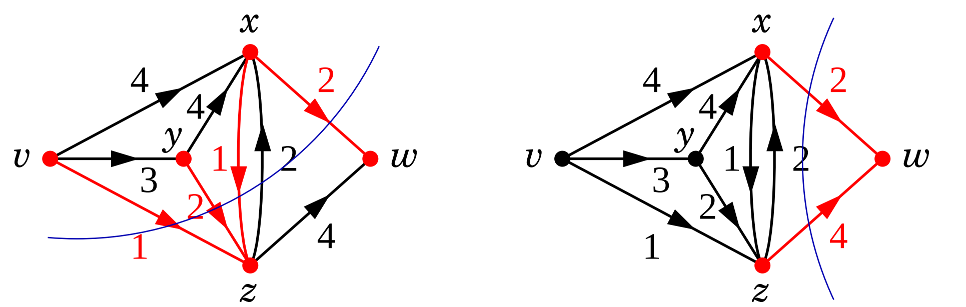
$$(\varphi \text{ の値 }) = (K \text{ の容量})$$

を満たしていれば、残りの容量を表すネットワーク N' を作らなくても φ が最大フローであることがわかる。

教科書 p.183 の例



では、次の赤い弧たちが最小カットである（この例では２とおりある）。



3. メンガーの定理

定義

連結グラフ $G = (V, E)$ と $v,\, w \in V$ に対し、

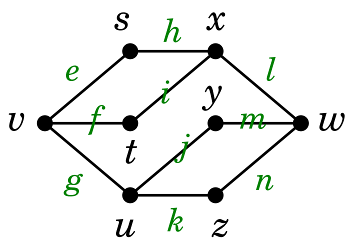
(1) 辺の部分集合 $F \subseteq E$ が「vw-非連結化集合」である、とは、任意の v-w 道が F の辺を含むこと。

(2) 頂点の部分集合 $W \subseteq V$ が「vw-分離集合」である、とは、任意の v-w 道が W の頂点を中間点として含むこと。

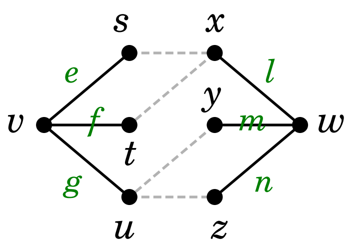
言い換えると

(1) $\Leftrightarrow$ $G - F$ には v-w 道が無いこと。

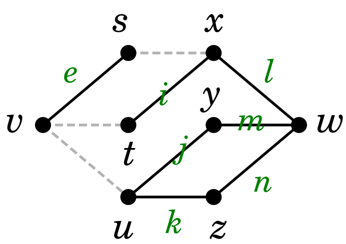
(2) $\Leftrightarrow$ $G - W$ には v-w 道が無いこと。



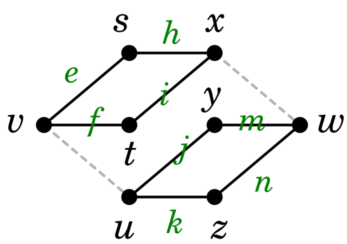
では、例えば $\{h, i, j, k\}$, $\{h, f, g\}$, $\{g, \ell\}$ はいずれも vw-非連結化集合である。



$G - \{h, i, j, k\}$

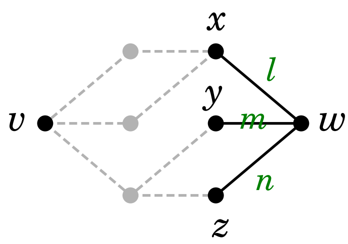


$G - \{h, f, g\}$

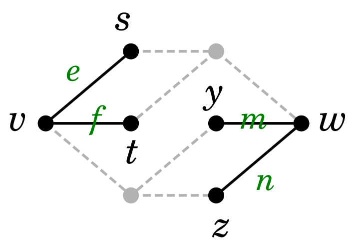


$G - \{g, \ell\}$

また、$\{s, t, u\}$ や $\{u, x\}$ は vw-分離集合である。



$G - \{s, t, u\}$



$G - \{u, x\}$

辺形のメンガーの定理

辺素な v-w 道の最大数は、vw-非連結化集合の辺数の最小値に等しい。

メンガーの定理

点素な v-w 道の最大数は、vw-分離集合の頂点数の最小値に等しい。

整数性定理

辺形のメンガーの定理は、有向グラフでも（辺を弧に読み替えて）成り立つ。