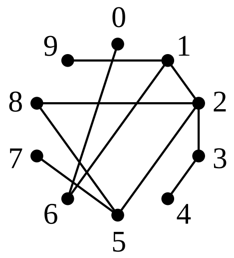
組合せとグラフの理論　（塩田）

— マッチング —

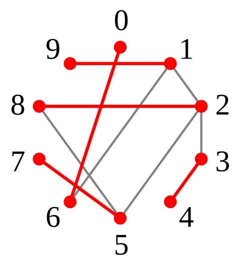
1. マッチングとは

問

10 人の刑事を 2 人ずつのペアにして捜査を行いたい。ただし、気の合わない者をペアにして支障をきたすといけないので、 気の合う者同士のペアを作ることにする。「気の合う関係」が右のグラフで表されるとき、どのようなペアを作ればよいか。

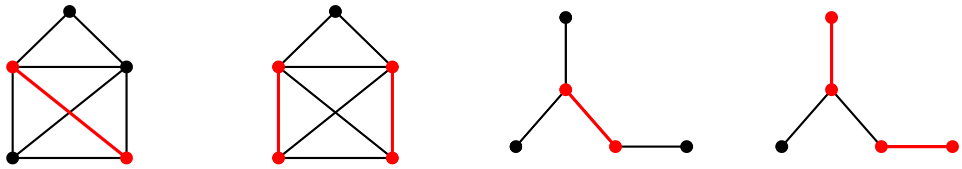


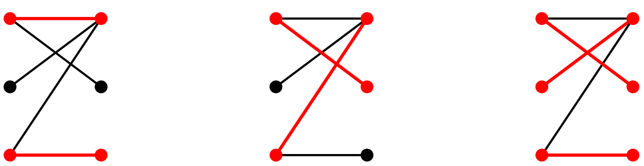
解　例えば次の赤い部分グラフのように組み合わせれば 5 つのペアを作ることができる。



定義

単純無向グラフ G の 1-正則な部分グラフ M を「G のマッチング」と呼ぶ。





など

※　全く辺のない「ゼロマッチング」もマッチングのひとつと考える。

定義

辺の本数が最大となるマッチングを「最大マッチング」と呼ぶ。

2. 二部グラフのマッチング

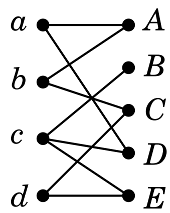
結婚問題

適齢期の女性 m 人、男性 n 人のグループがあるとする（ $m \leqq n$ ）。全ての女性がこのグループ内の気の合う男性と結婚できる条件は何か。

気の合う関係が次の表で表されているとき、この関係を表すグラフは図の G となり、たとえばマッチング M のように組み合わせると全ての女性が気の合う男性と結婚できる。

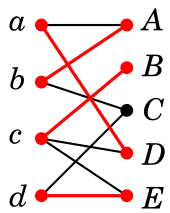
女性	知り合いの男性
a	A, D
b	A, C
c	B, D, E
d	C, E¡

→



G

→



M

定義

二部グラフ $G = G(V_1, V_2)$ において、V_1 に属する頂点をすべて含むマッチングを「V_1 から V_2 への完全マッチング」と呼ぶ。

※　結婚問題は、V_1 を女性、V_2 を男性の集合として、V_1 から V_2 への完全マッチングが存在するための条件は何か、と言い換えられる。男性は余っても構わないことに注意。

V_1 の部分集合 A に対して

$$\varphi(A) = \{\, A \text{ に属する頂点の隣接点たち } \}$$

を A の近傍と言う（ $\varphi(A)$ は V_2 の部分集合である ）。このとき、

ホールの結婚定理

V_1 から V_2 への完全マッチングが存在すること

$$\Leftrightarrow \quad \text{任意の } A \subseteq V_1 \text{ に対して } |\,\varphi(A)\,| \geqq |\,A\,| \text{ が成り立つこと} \quad \cdots\ (*)$$

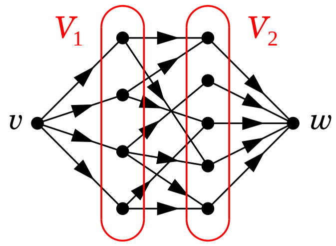
条件 $(*)$ が成立するしないに関わらず、次のアルゴリズムは二部グラフの最大マッチングを与える。

二部グラフの最大マッチングアルゴリズム

1° 次のようにネットワーク N を作る。

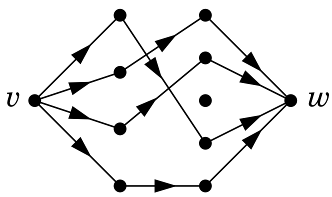
- G の各辺を、V_1 から V_2 へ向かう弧に置き換える。
- 入口 v と出口 w を付加し、v から V_1 の全ての頂点へ、V_2 の全ての頂点から w へ、それぞれ弧を描く。
- 全ての弧の重みを 1 に設定する。

N



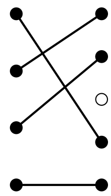
2° N の最大フロー Φ を求める。

Φ



3° Φ に関与する弧を取り出し、無向化したグラフから、さらに v と w を除去して M とする。

M



条件 $(*)$ が成り立つときは、N の最小カットの容量 (= 最大フロー Φ の値 = M の辺数) が $|V_1|$ に等しくなる。実際、$K = (S, \overline{S})$ を任意のカットとし、

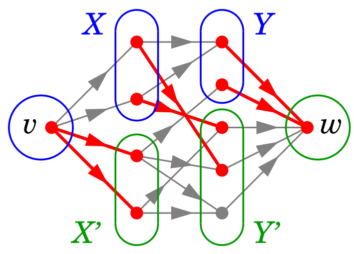
$$X = S \cap V_1, \quad Y = S \cap V_2, \quad X' = \overline{S} \cap V_1, \quad Y' = \overline{S} \cap V_2$$

とおくと K に属する弧は次の 3 種類：

(i) v から X' の頂点に至るもの

(ii) X の頂点から Y' の頂点に至るもの

(iii) Y の頂点から w に至るもの



N の作り方から (i) の弧は $|X'|$ 本、(iii) の弧は $|Y|$ 本。また (ii) の弧は最小でも $|\varphi(X) - Y|$ 本以上あり、

$$
\begin{aligned}
K \text{ の容量 } &\geqq \left| X' \right| + |Y| + |\varphi(X) - Y| \\
&\geqq \left| X' \right| + |Y| + |\varphi(X)| - |Y| \\
&\geqq \left| X' \right| + |\varphi(X)| \geqq \left| X' \right| + |X| = |V_1| \qquad (\because\ (*)\ )
\end{aligned}
$$

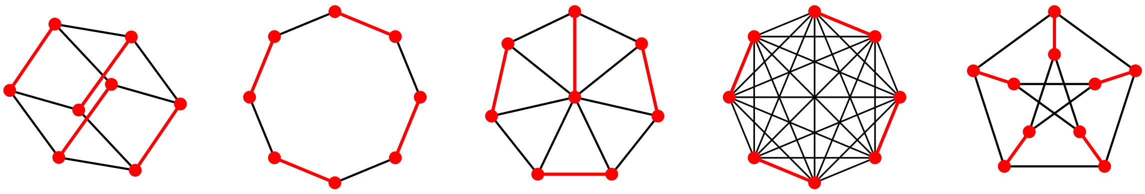
特に $S = \{v\}$ のときは K の容量 $= |V_1|$ となり、これが最小カットである。

3. 一般のグラフのマッチング

定義

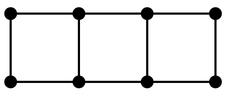
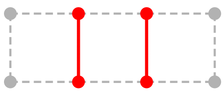
一般のグラフにおいては、全ての頂点を含むマッチングを「完全マッチング」と呼ぶ。

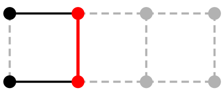
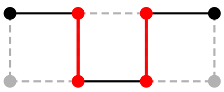
5 つのプラトングラフ、Q_k ($k \geqq 2$), n が偶数のときの C_n, W_n, K_n, ペテルセングラフ等は完全マッチングを持つ。



定義

M を G のマッチングとする。(ゼロマッチングでもよい。) G 内の道 P が、M の辺を交互に含み、始点と終点がどちらも M に属さないとき、P を M-増加道と呼ぶ。

たとえば　$G =$  のマッチング　$M =$  について

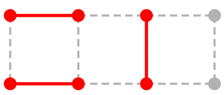
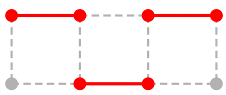
$P =$  や　$Q =$  が M-増加道になる。

定理

P が M-増加道であれば、辺集合として

$$M' = P \oplus M = P \text{ XOR } M$$

とおくことにより、M' は M が辺が 1 本多いマッチングとなる。

上の例では　$P \oplus M =$  ,　$Q \oplus M =$ 

定理

M が最大マッチングであることと、M-増加道が存在しないことは同値である。