組合せとグラフの理論　（塩田）　2024 年度 学期末レポート解答例

— 学籍番号が奇数 の学生用 —

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

【1】次の行列はいずれも頂点数 5 の単純無向グラフの隣接行列である。それぞれどのグラフの隣接行列であるか、下記の選択肢 (a) ～(i) から選んで記号で答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

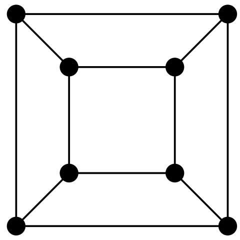
選択肢：

(a) 完全グラフ K_5　(b) 星グラフ $K_{1,4}$　(c) 完全二部グラフ $K_{2,3}$
(d) 道グラフ P_5　(e) 閉路グラフ C_5　(f) 車輪グラフ W_5
(g) 空グラフ N_5　(h) $P_2 \cup P_3$　(i) $P_2 \cup C_3$

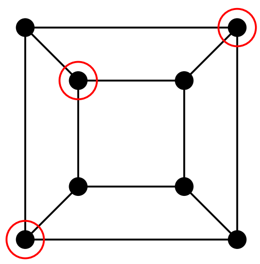
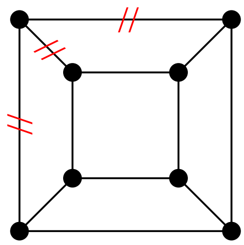
解答欄：

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
e	a	c	d	i	f

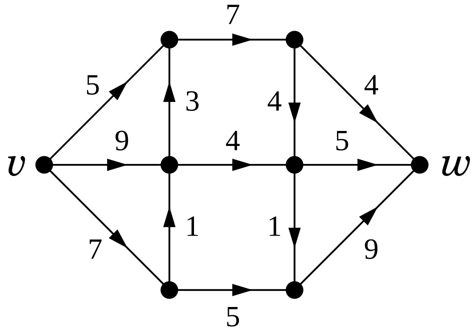
【2】 次の単純無向グラフ（立方体グラフ）の連結度と辺連結度を答え、頂点数最小の分離集合と、辺数最小の非連結化集合の例をそれぞれひとつ図に書き込め。



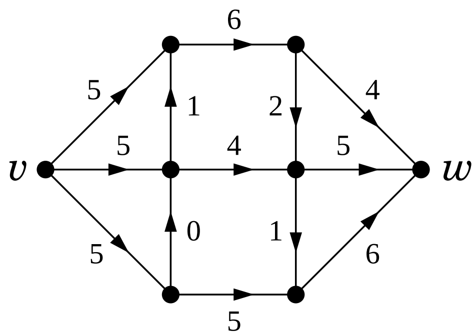
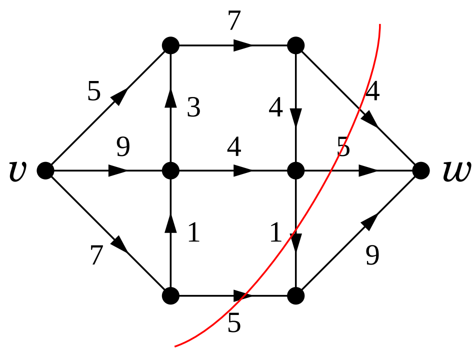
解答欄：

連結度	辺連結度
3	3
頂点数最小の分離集合の例	辺数最小の非連結化集合の例
	

【3】 v を入口、w を出口とする次のネットワーク N について、最大フローの例と最小カットの例をそれぞれひとつ図示し、最大フロー値を答えよ。



解答欄：

最大フローの例	
最小カットの例	
最大フロー値	15

【4】 頂点数 6 の単純無向グラフ G で、2 条件

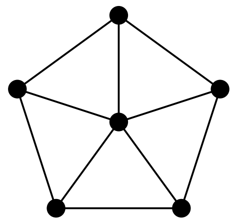
(1) G の彩色数 $\chi(G)$ は 4

(2) G の補グラフの彩色数 $\chi(\overline{G})$ は 3

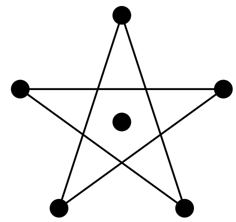
をともに満たすものをひとつ答え、条件 (1), (2) を満たす理由をそれぞれ述べよ。

<u>例 1</u>　$G = W_6$

G :



$\overline{G}$:

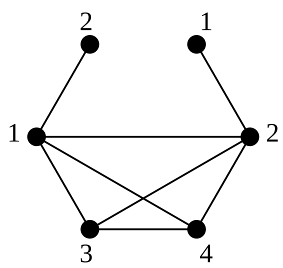


(1) $\chi(W_6) = 4$ は授業でやった。(W_6 は C_5 に 1 点を付加して C_5 の全ての頂点と隣接させたグラフであり、$\chi(C_5) = 3$ ゆえ。)

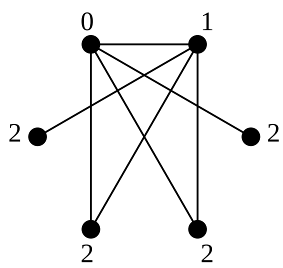
(2) $\overline{G} \cong C_5 \cup N_1$ ゆえ $\chi(\overline{G}) = \max(\chi(C_5), \chi(N_1)) = \max(3, 1) = 3.$

<u>例 2</u>　$G =$ 図のグラフ

G :



$\overline{G}$:



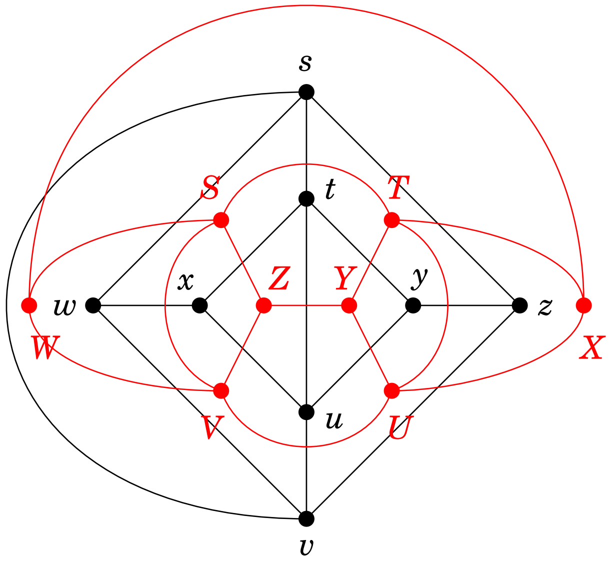
(1) G は K_4 を含むので $\chi(G) \geqq 4$ であり、実際に図のように 4 色で点彩色可能。

(2) $\overline{G}$ は K_3 を含むので $\chi(\overline{G}) \geqq 3$ であり、実際に図のように 3 色で点彩色可能。

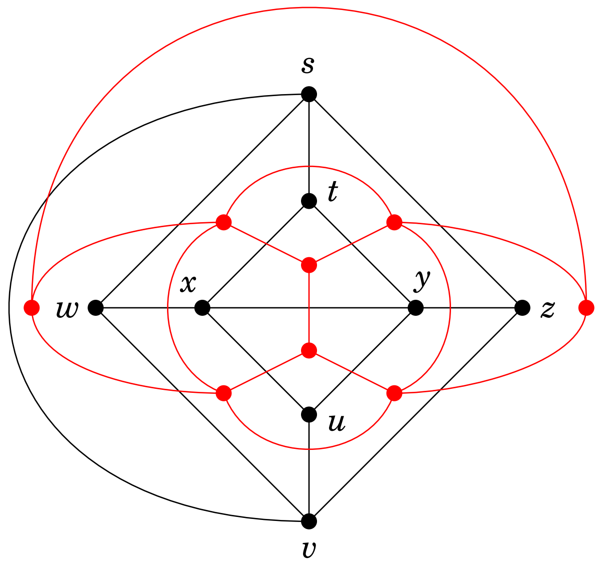
【5】 平面グラフは、その幾何学的双対グラフと同型になるとき「自己双対である」という。

次の 2 つの平面グラフ G, H は、一方が自己双対で、他方は自己双対ではない。いずれが自己双対で、いずれが自己双対でないかを述べよ。また、それぞれ自己双対である理由、自己双対でない理由を述べよ。

G :



H :



それぞれの双対グラフを赤色で示す。

G^* の頂点を図のように名付けると、G の小文字名の頂点と G^* の大文字名の頂点を対応付けることにより隣接関係が一致する。従って G は自己双対である。

一方、H では次数 4 の 4 個の頂点は s と v, x と y のみが隣接しているのに対し、H^* では次数 4 の 4 個の頂点が C_4 の形で隣接している。従って H は自己双対ではない。