組合せとグラフの理論　(塩田)

— グラフの彩色 —

1. スケジュール調整問題と彩色問題の関係

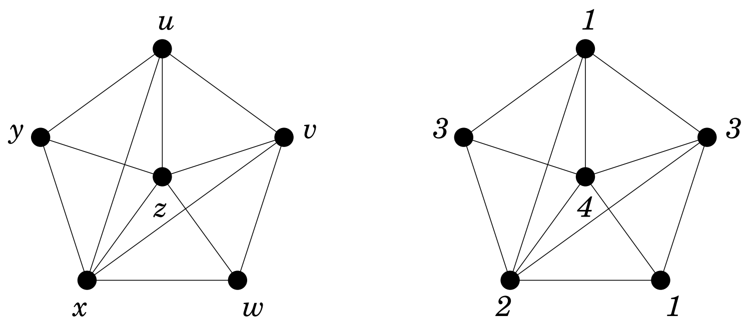
問

　次の表のように 10 人のメンバー $A, B, \cdots, J$ が 6 つの委員会 $u, v, \cdots, z$ に所属しているとする。各委員にとって会議が重ならないように、最少のコマ数で 6 つの委員会の時間帯を設定せよ。

委員会	構成員									
u	A	B	C	D	E					
v			C	D	E	F	G			
w						F	G	H	I	
x				D				H	I	J
y	A	B								J
z	A	B	C		E		G	H	I	J

解

　委員会を頂点とし、構成員を共有する委員会同士を辺で結んだグラフを考える。構成員を共有する委員会を同時に開くことができない、ということが、丁度このグラフで点彩色を考えることに該当する。



　このグラフの彩色数は 4 であり、右図のように 4 色で点彩色できる。従ってこの 6 つの委員会は最少では 4 コマで設定できる：

　　1 コマ目： u 委員会, w 委員会

　　2 コマ目： x 委員会

　　3 コマ目： v 委員会, y 委員会

　　4 コマ目： z 委員会

2. 彩色多項式

定義

グラフ G を x 色で点彩色する場合の数を $P_G(x)$ と表す。

定理 A

$P_G(x)$ は x の整数係数の多項式になる。そこでこれを「G の彩色多項式」と呼ぶ。

命題

G が k 色では点彩色できないこと $\Leftrightarrow P_G(k) = 0 \Leftrightarrow P_G(x)$ が一次因子 $x - k$ を持つ

定理 B

G の勝手な辺 e を取り、$H = G - e$（除去）、$K = G \backslash e$（縮約）と置くとき、$P_G(x) = P_H(x) - P_K(x)$ が成り立つ。

彩色数を求めるアルゴリズム

1° 定理 B を用いた再帰的プログラムで $P_G(x)$ を計算する。

2° $P_G(x)$ の一次因子を $x, x-1, \cdots$ の順に括り出してゆく。

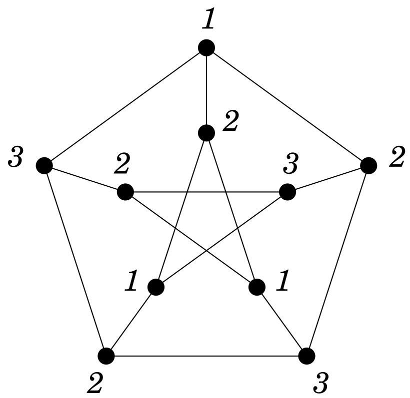
3° 始めて割り切れなくなった一次因子を $x - k$ とすると、k が彩色数。

実行例

ペテルセングラフの場合

隣接行列 ：

```
0 1 0 0 1 1 0 0 0 0
1 0 1 0 0 0 1 0 0 0
0 1 0 1 0 0 0 1 0 0
0 0 1 0 1 0 0 0 1 0
1 0 0 1 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 1 1 0
0 1 0 0 0 0 0 0 1 1
0 0 1 0 0 1 0 0 0 1
0 0 0 1 0 1 1 0 0 0
0 0 0 0 1 0 1 1 0 0
```



彩色多項式 ：

```
X^10 - 15 X^9 + 105 X^8 - 455 X^7 + 1353 X^6 - 2861 X^5
+ 4275 X^4 - 4305 X^3 +2606 X^2 - 704 X
```

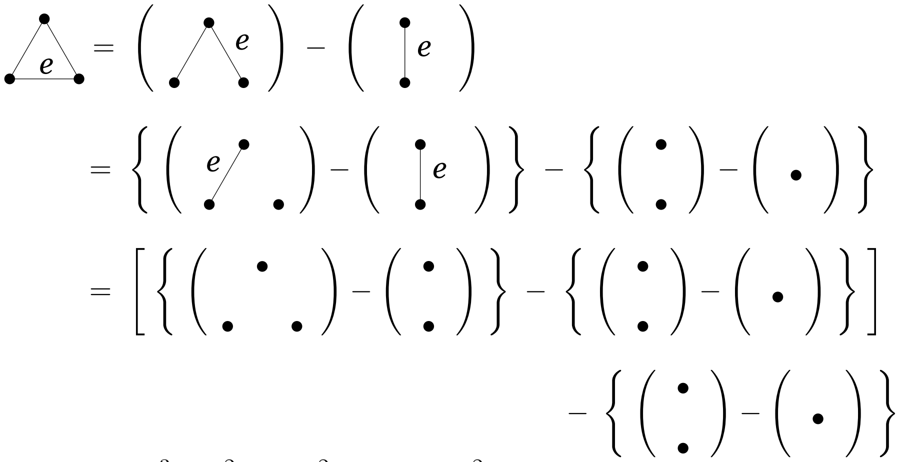
一次因子抽出 ：

```
X (X - 1) (X - 2) (X^7 - 12 X^6 + 67 X^5 - 230 X^4
+ 529 X^3 - 814 X^2 + 775 X - 352)
```

彩色数 = 3

再帰的プログラムの動作（ K_3 の場合 ）

空グラフに達するまで再帰呼び出しを繰り返すようにプログラミングすると、以下のような計算が実行される。このことから、彩色多項式は「多項式である」ことがわかる。（教科書 pp.140-141 にならってグラフの絵で彩色多項式を表している。）



$$= [\{x^3 - x^2\} - \{x^2 - x\}] - \{x^2 - x\}$$
$$= x^3 - 3x^2 + 2x$$

※　手計算では、教科書 p.141 のように K_n, N_n, 木, グラフの和等の公式を上手に使う。

彩色多項式の例

グラフ	n	m	彩色多項式
C_6	6	6	$x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 5x$ $= x(x-1)(x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 5)$
$K_{3,3}$	6	9	$x^6 - 9x^5 + 36x^4 - 75x^3 + 78x^2 - 31x$ $= x(x-1)(x^4 - 8x^3 + 28x^2 - 47x + 31)$
W_6	6	10	$x^6 - 10x^5 + 40x^4 - 80x^3 + 79x^2 - 30x$ $= x(x-1)(x-2)(x-3)(x^2 - 4x + 5)$
正八面体グラフ	6	12	$x^6 - 12x^5 + 58x^4 - 137x^3 + 154x^2 - 64x$ $= x(x-1)(x-2)(x^3 - 9x^2 + 29x - 32)$
$K_2 \cup K_3$	5	4	$x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2 = x^2(x-1)^2(x-2)$

定理 C

彩色多項式について次が成り立つ：

- G のオーダー、サイズを n, m とすると　$P_G(x) = x^n - mx^{n-1} + \cdots$.
- 係数の符号は上から交互に $+, -, +, -, \cdots$ となる
- 最低次の次数は G の連結成分の個数に等しい