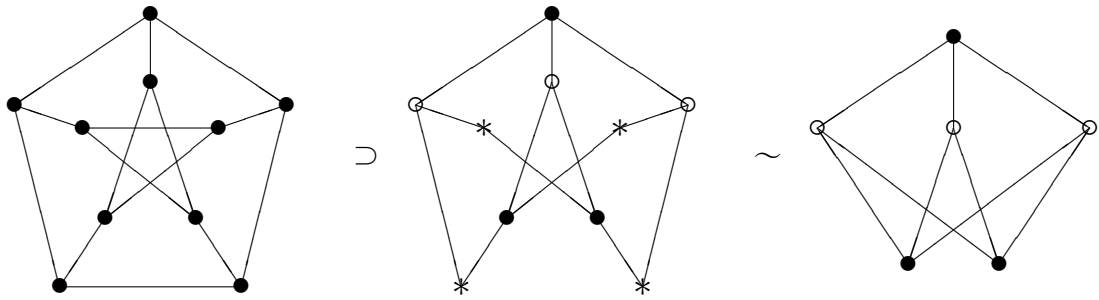


組合せとグラフの理論 (塩田)

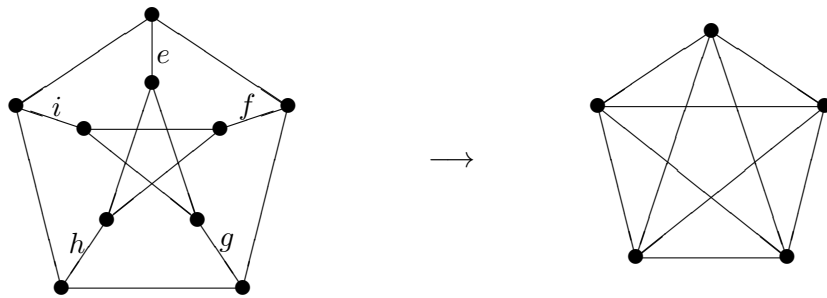
— ペテルセングラフが平面的でないことの証明 —

第1の証明



部分グラフが $K_{3,3}$ に位相同型ゆえ。

第2の証明



5本の辺 e, f, g, h, i で縮約すると K_5 ができるので。

第3の証明

ペテルセングラフでは

$$\text{頂点数 } n = 10, \quad \text{辺数 } m = 15$$

である。平面グラフとして描画できると仮定して

$$\text{面数} = f$$

とおくと、オイラーの公式より

$$n - m + f = 2$$

$$\therefore f = 7$$

しかしペテルセングラフには三角形も四角形も無いので

$$f \leq \frac{2m}{5} = 6$$

矛盾。