組合せとグラフの理論　(塩田)

— オイラーグラフ、ハミルトングラフ —

1. 完全グラフのオイラーサイクル

n が 3 以上の素数ならば完全グラフ K_n のオイラーサイクルをひとつ簡単に構成できる。頂点を正 n 角形に配置して描いておいて、

- 適当な点 v_0 から出発し、
- 始めは外周をひとまわり、
- 次はひとつ飛びにひとまわり、
- 次はふたつ飛びにひとまわり $\cdots$

とすればよい。(証明してごらん。)

2. 順列の半ハミルトン道

4 次の順列を、2 文字ずつ異なるもの同志でつなぐと次のような半ハミルトン道がみつかる：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1234 & \to & 1243 & \to & 1342 & \to & 1324 & \to & 1423 & \to & 1432 \\
\to & 2431 & \to & 2413 & \to & 2314 & \to & 2341 & \to & 2143 & \to & 2134 \\
\to & 3124 & \to & 3142 & \to & 3241 & \to & 3214 & \to & 3412 & \to & 3421 \\
\to & 4321 & \to & 4312 & \to & 4213 & \to & 4231 & \to & 4132 & \to & 4123
\end{array}
$$

- 全ての順列について調べる必要があるようなプログラムを書くときに、この半ハミルトン道を用いると代入文が節約できる：

```
x[1]=a; x[2]=b; x[3]=c; x[4]=d;
                x[3]=d; x[4]=c;
        x[2]=c;         x[4]=b;
                x[3]=b; x[4]=d;
        x[2]=d;         x[4]=c;
                x[3]=c; x[4]=b; ...
```

- これは任意の長さの順列で可能。

3. オイラー有向グラフの応用：ドゥブリュエイン列

$$aaababbbaa$$

という記号列の中には「 a と b から作れる 3 文字単語」が全て含まれている。例えば abb は $aaab\underline{abb}baa$ のように。

定義　このように

- シンボル $1, 2, \cdots, m$ を用いた、長さ $m^n + (n-1)$ の文字列で、
- シンボル $1, 2, \cdots, m$ から作れる n 文字単語を全て含むもの

を**ドゥブリュエイン列** (de Bruijn sequence) と呼ぶ。

- ドゥブリュエイン列はリセット不要な番号錠の解読に使える。
  （総当たりと比較して $1/n$ の時間でできる。）
- ドゥブリュエイン列は乱数生成にも有用。

ドゥブリュエイン列の作り方

1. 次のようなオイラー有向グラフ $D = (V, A)$ を構成する：
   - $(n-1)$ 文字単語すべての集合 V を頂点集合とする 。
   - $v, w \in V$ について
     $$v \text{ の後ろ } (n-2) \text{ 文字} = w \text{ の前 } (n-2) \text{ 文字}$$
     が成り立つときに弧 vw を描く。
2. D のオイラーサイクル
   $$v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_n \to v_0$$
   を求める。
3. すると、v_0(v_1の末尾の文字)(v_2の末尾の文字)$\cdots$ がドゥブリュエイン列になる。

$m = 2$, $n = 3$ の例

$V = \{aa, ab, ba, bb\}$ で、有向グラフ D は右の通り:

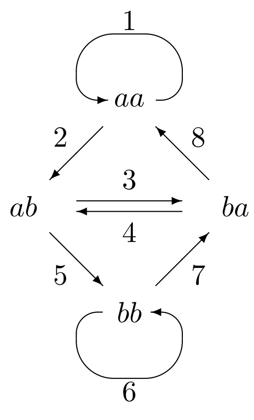
D のオイラーサイクルとして

$$aa \to aa \to ab \to ba \to ab \to bb \to bb \to ba \to aa$$

がみつかるので、ドゥブリュエイン列は

$$aa, a, b, a, b, b, b, a, a$$

となる。



$m = 5$, $n = 3$ の例

000100200300401101201301402102202302403103203303404104204304411 1

2113114122123124132133134142143144222322423323424324433342444 00