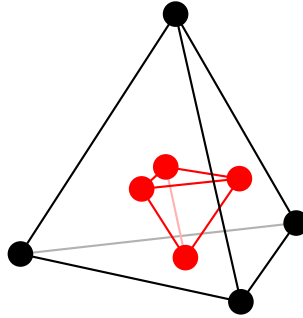


組合せとグラフの理論 (塩田)

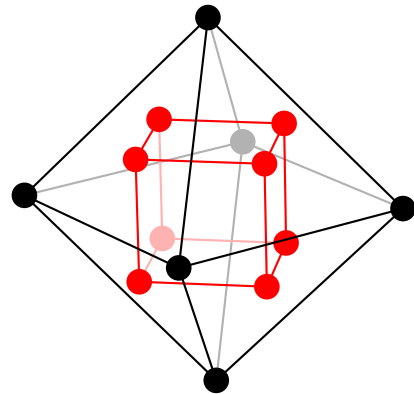
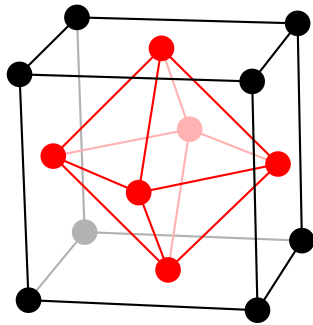
— 平面グラフの双対性 —

1. プラトングラフの双対性

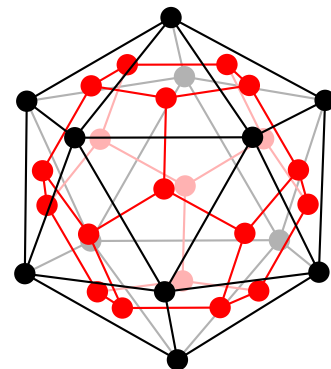
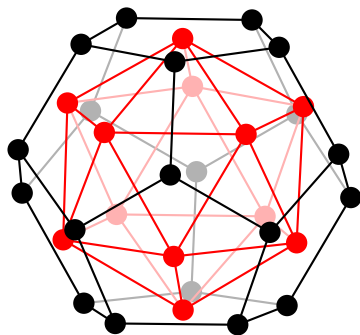
正四面体グラフ



立方体グラフと正八面体グラフ



正十二面体グラフと正二十面体グラフ



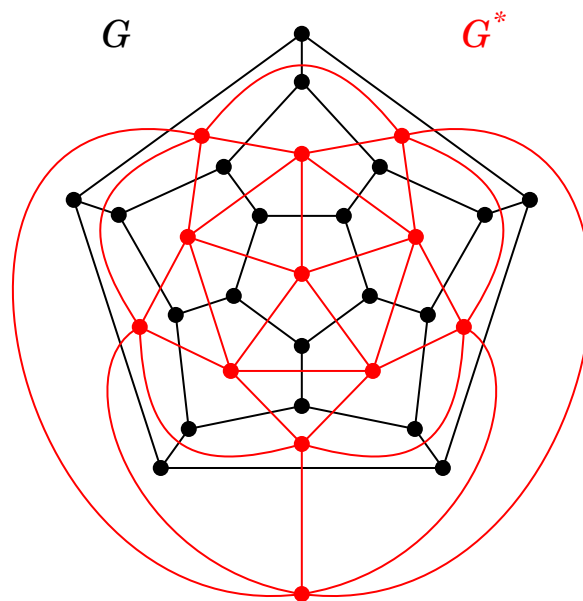
2. 閉路とカットセットの双対性

定理

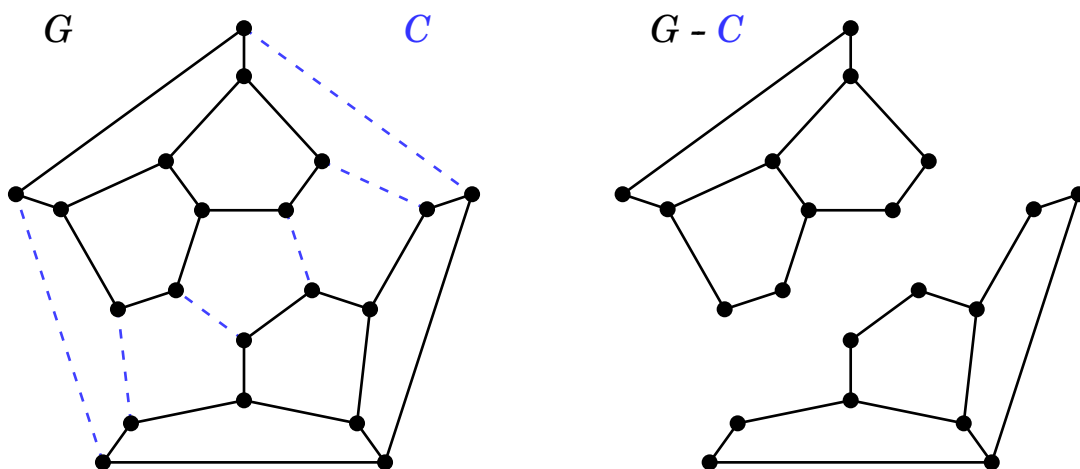
G を連結な平面グラフ、 G^* をその双対グラフとし、辺の一対一对応 $e \leftrightarrow e^*$ によって G, G^* の辺の部分集合 $C \leftrightarrow C^*$ が対応しているとする: このとき

- (1) C が G のカットセットであること $\Leftrightarrow C^*$ が G^* の閉路であること。
- (2) C が G の閉路であること $\Leftrightarrow C^*$ が G^* のカットセットであること。

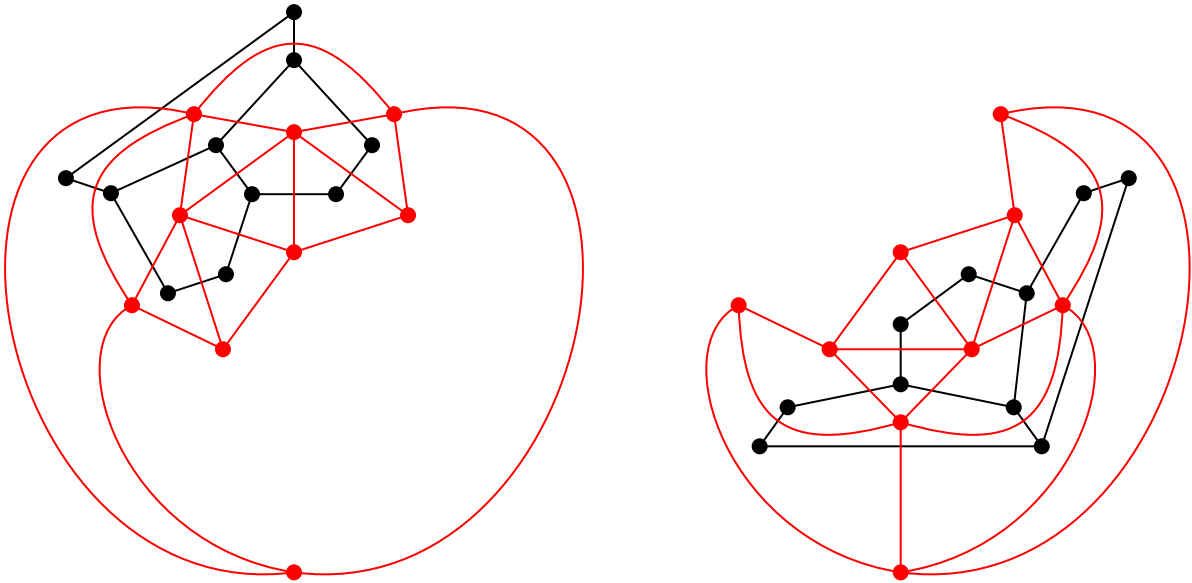
正十二面体グラフ G とその双対グラフである正二十面体グラフ G^* の例を示しながら説明する。



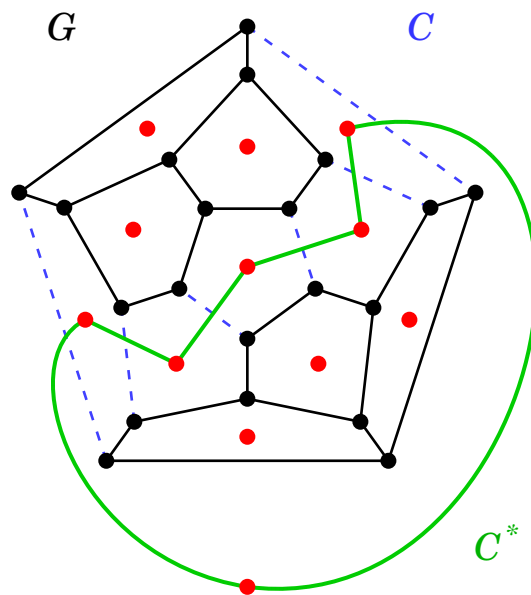
(1) の \Rightarrow) C がカットセットならば $G - C$ はふたつの連結成分に分かれる。



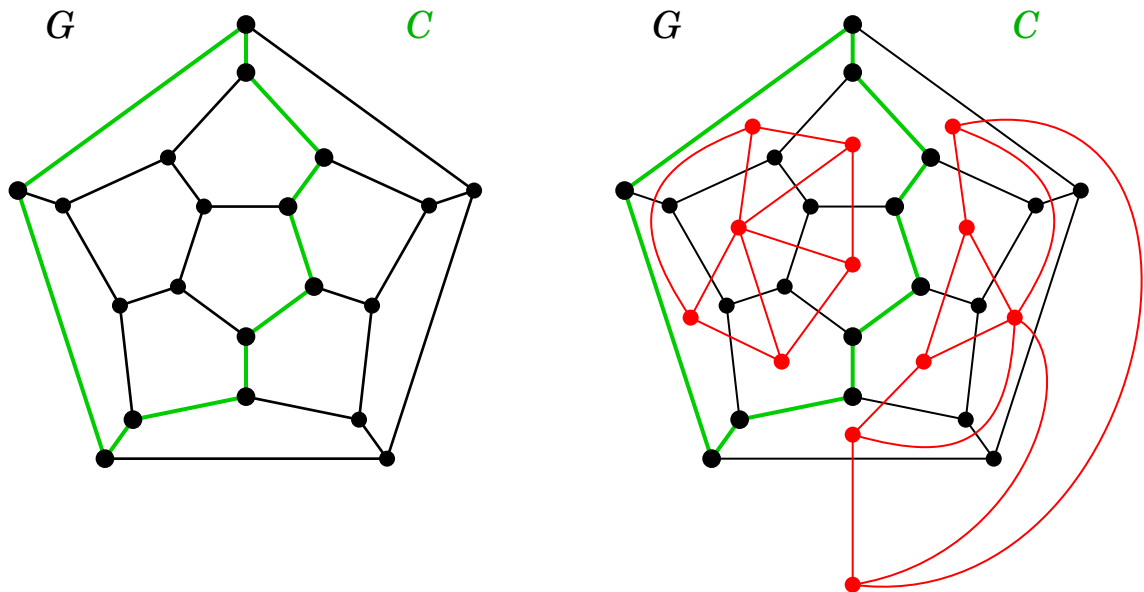
それぞれの連結成分に対応する G^* の面たちは全平面を2つに分割する (図では左側が外面を含む)。



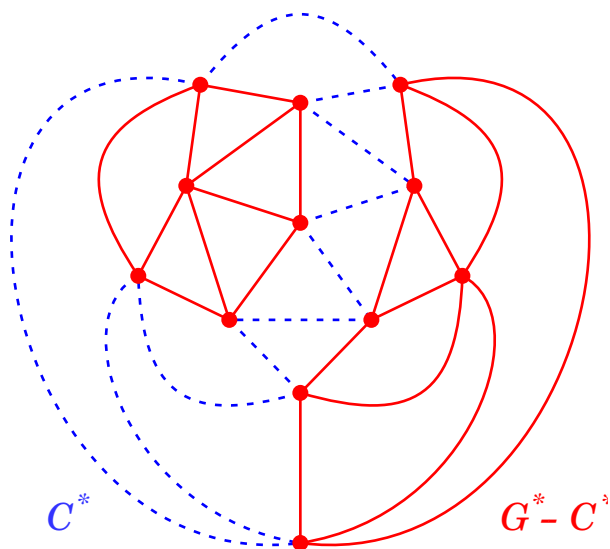
C^* は丁度その境界線に一致する閉路になる。



(2) の \Rightarrow) C が閉路ならば、 C は G の面たちを2つの連結なグループに分ける。すなわち C は G^* を2つの連結成分 G_1^*, G_2^* に分ける。



すると、 C^* は G_1^* の頂点と G_2^* の頂点を結ぶ G^* の辺全ての集合と一致し、 G^* のカットセットになる。



(1), (2) の \Leftarrow) は G と G^* を逆にするとと言える。